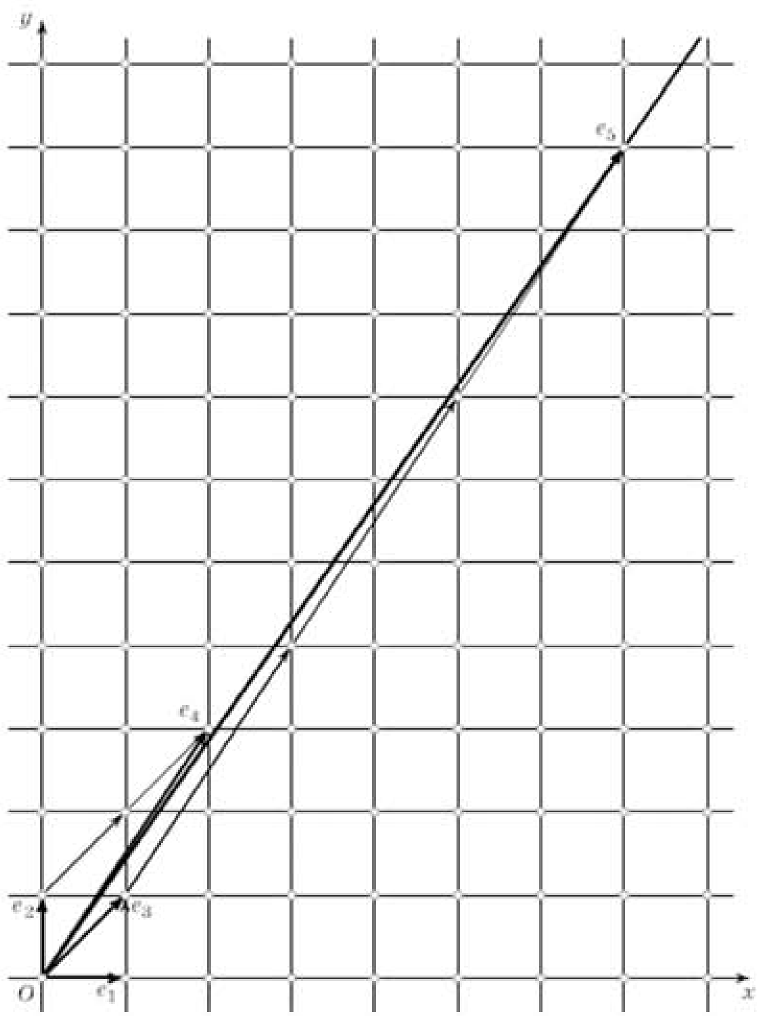
Статистики периодических и многомерных цепных дробей

В.И. Арнольд



$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}} = [a_1, a_2, \dots]$$

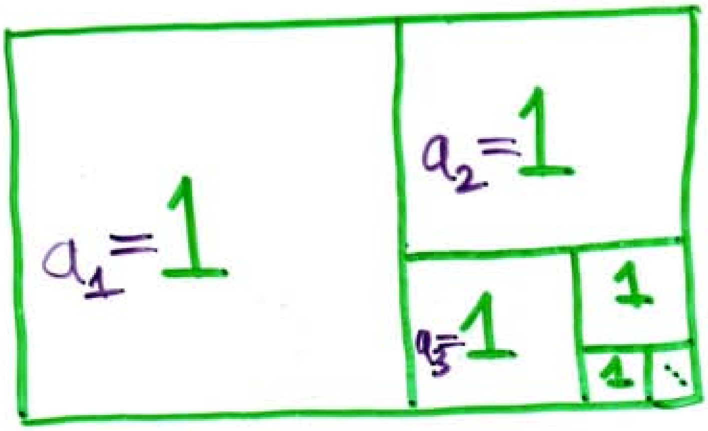
цепная дробь числа $x \in \mathbb{R}$

неполные частные $a_k \in \mathbb{Z}$ ($a_k > 0$ при $k > 1$)

$a_1 = [x]$ целая часть

Пример: золотое сечение

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1, 1, 1, \dots]$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример: $\pi \approx 3,1415926\dots$

113 | 355

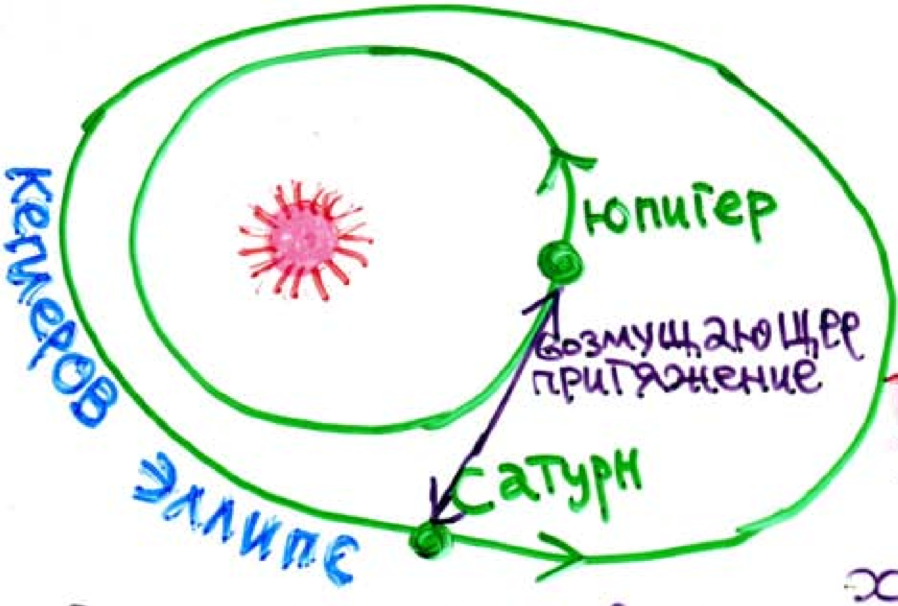
$$\left(\pi \approx \frac{355}{113}\right) = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{292}}}$$

...

$$x \approx \frac{p_n}{q_n}, \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

(q_{n+1} (= 292) велико) $\Rightarrow$ (приближение p_n/q_n числа x очень хорошее)

$\boxed{\text{355/113 дает 6 верных знаков}}$



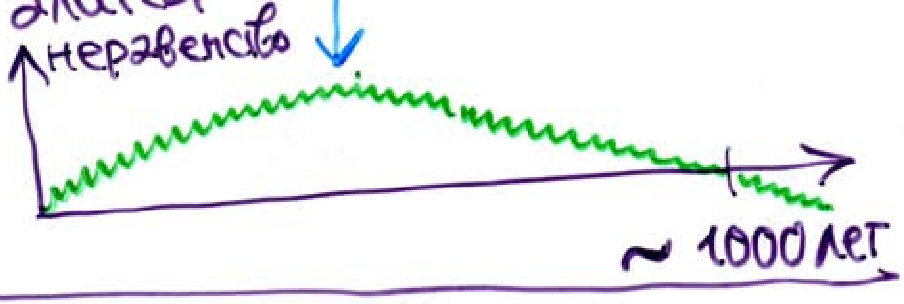
$$\omega_C \approx 120{,}5\ (''/\text{день})$$

$$\omega_Ю \approx 299\ (''/\text{день})$$

Резонанс:

$$x = \frac{\omega_C}{\omega_Ю} \approx \frac{2}{5} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

Резонанс вызывает большое возмущение („неравенство"), вековое: удаление планеты длится столетия!



А. Пуанкаре: устойчивость Солнечной системы зависит от обилия и силы резонансов в ней.

Гильден, (C.R. Acad. Sci. Paris, 1888): наблюдаемые резонансы укладываются в предложенную Гауссом статистику неполных частных цепных дробей случайных вещественных чисел: доля m_k неполных частных $a_n = k$ составляет

$$m_k = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) \sim \frac{1}{k^2 \ln 2}$$

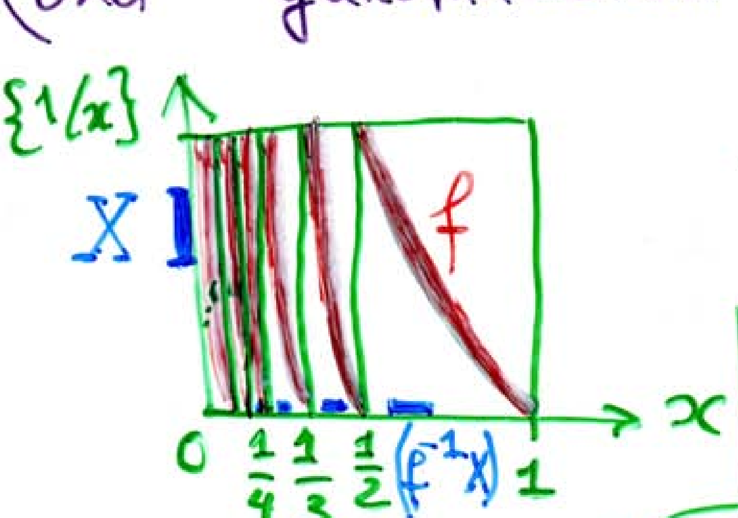
Статистика Гаусса–Кузьмина

k	1	2	3	4	...
m_k	0,41	0,30	0,08	0,05	

Гаусс, предложивший m_k, знал, что статистика такая не всегда и ничего не опубликовал.

Кузьмин (1928) доказал, что доля неполных частных $a_n = k$ составляет m_k для почти любого разлагаемого в цепную дробь $x \in \mathbb{R}$. (Кроме $\{x\}$ меры Лебега ноль)

Хинчин (много позже) вывел это из эргодической теоремы Биркгофа (для динамической системы $x \mapsto \{1/x\}$)



Но теорема Биркгофа появилась лет через 5 после теоремы Кузьмина.

Лемма:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{99\cdot 100} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100}$$

Инвариантность меры преобразования f:

$$\mathrm{mes}\left(f^{-1}(X)\right) = \mathrm{mes}\, X \qquad \forall X$$

(хотя f растягивает отрезки, как $f(x) = \{1/x\}$).

Пример.

$$\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{\underbrace{1+\cfrac{1}{2}}_{\text{период}}+\cfrac{1}{\underbrace{1+\cfrac{1}{2}}+\dots}} = [1,\underbrace{[1,2]}]$$

длина периода $T=2$

Теорема Лагранжа.

Цепная дробь числа x **периодична**

$\Updownarrow$

число x – **квадратичная** иррациональность:

$$rx^2+px+q=0,\quad p,q,r\in\mathbb{Z}$$

Tsuchikashi, 1983: алгебраические числа степени n имеют периодические дроби.

Коркина, 1994: и только они многомерные цепные

Арнольд, 1980 (1993-11 в „Задачах"):

Гипотеза А: неполные частные периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей $x^2+px+q=0$ (и $x=\sqrt{u/v}$) удовлетворяют статистике Гаусса-Кузьмина асимптотически при $R\to\infty$ (в среднем по кругам $p^2+q^2\le R^2$ радиуса R).

В.А. Быковский (с учениками), Хабаровск, 2006:

Гипотеза А верна (в том числе и для $rx^2+px+q=0$).

Длины $T(p,q)$ периодов цепных дробей чисел x, $x^2+px+q=0$.

Периоды одинаковы для обоих корней и $T(-p,q)=T(p,q)$. Таблица $T(p,q)$:

q \ p	−5	−4	−3	−2	−1	p=0	1	2	3	4	5
−5	2	0	1	2	2	1	2	2	1	0	2
−4	5	2	0	1	3	0	3	1	0	2	5
−3	3	4	2	0	1	2	1	0	2	4	3
−2	4	2	3	2	0	1	0	2	3	2	4
−1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
q=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0				0	1	2	2
2	3	1	0						0	1	3
3	1	0								0	1
4	0	0								0	0
5	1										1

$\mathbb{C}$-корни

$p^2<4q$

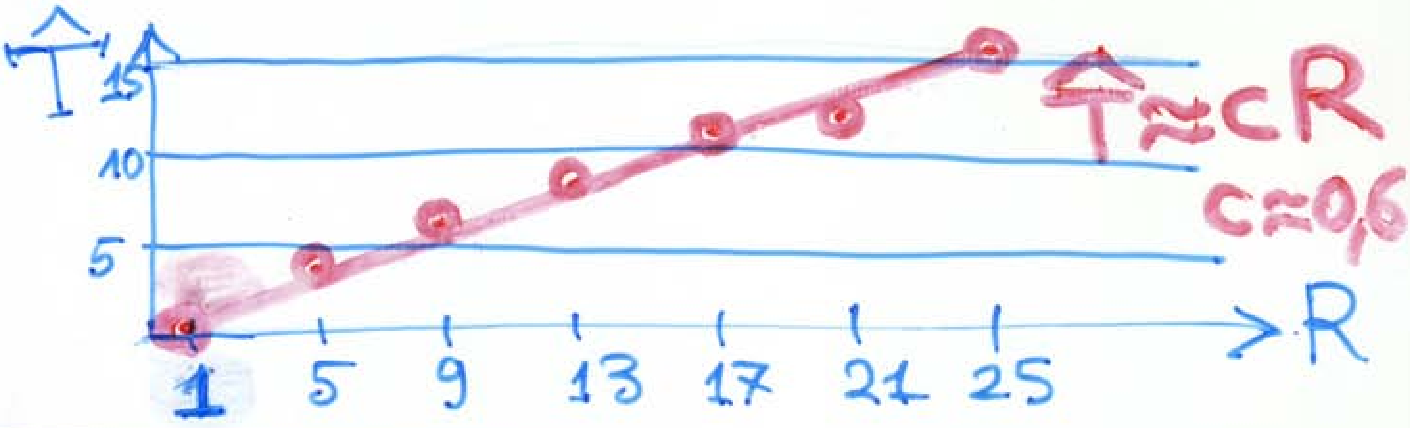
$\Delta<0$

Гипотеза: $T \simeq \sqrt{\Delta}$ $\quad \Delta = p^2-4q$ (дискриминант)

($T=0$ когда x рациональны)

Средняя длина $\hat{T}(R)$ периодов $T(p,q)$ для $x^2+px+q=0$ по кругу $\{p^2+q^2 \le R^2\}$

R	1	5	9	13	17	21	25
$\hat{T}$	0,66	3,82	6,35	8,64	10,9	13,1	15,1



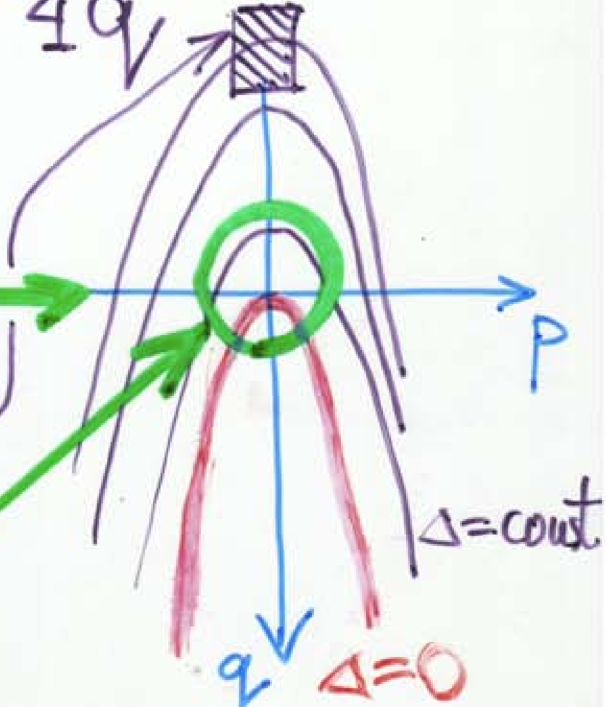
Гипотеза: $T(p,q)$ растет в среднем как $\sqrt{\Delta}$, $\Delta = p^2 - 4q$

На параболах $\Delta = \text{const}$ T постоянно,

вдоль оси p $T \asymp \sqrt{\Delta} \approx |p|$

вдоль оси $q<0$ $T \asymp \sqrt{\Delta} \asymp \sqrt{|q|}$

$$\{p^2+q^2=R^2\}$$



Числа K(t)

повторений значений $T(p,q)=t$ длин периодов цепных дробей чисел x, $x^2+px+q=0$, в круге $p^2+q^2 \le R^2$ (при $R=16$):

наблюдается преимущественная четность длин периодов.

Из энтропийных соображений ясно, что удовлетворяющих статистике Г–К слов длины t гораздо больше, чем периодов цепных дробей длины t у чисел x для $x^2+px+q=0$.

ПЕРИОД $[a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+t}]$ **НЕ СЛУЧАЕН**

ПАЛИНДРОМЫ:

А РОЗА УПАЛА НА ЛАПУ АЗОРА

$\sqrt{187} = [13, [1, 2, 13, 2, 1, 26]]$

$\ldots, [1, 2, 13, 2, 1, 26], [1, 2, 13, 2, 1, 26], \ldots$

Теоремы о палиндромичности

Арнольд, 2003 (IMPA, Бразилия, Рио)

периоды цепных дробей для $\sqrt{u/v}$ — палиндромы

Галуа — для $\sqrt{u}$

Ф. Аикарди, 2007 Италия, ICTP (Центр теорфизики)

М. Павловская, 2007 (школьница из Сан-Франциско):

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ ДЛЯ x, $x^2+px+q=0$, ПАЛИНДРОМИЧНЫ

Примеры

$\sqrt{A^2-1} = [(A-1), [1, (2A-2)]]$; $A^2-1 = 3, 8, 15, 24, \ldots$;

$\sqrt{A^2+2} = [A, [A, 2A]]$; $A^2+2 = 3, 6, 11, 18, 27, \ldots$

$\sqrt{A^2+A} = [A, [2, A]]$; $A^2+A = 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

$\sqrt{A^2-2} = [\ldots [1, (A-2), 1, (2A-2)]]$; $A^2-2 = 7, 14, 23, \ldots$;

$\sqrt{4A^2+A} = [\ldots [4, 4A]]$; $4A^2+A = 18, 39, 68, \ldots$;

$\sqrt{4A^2+4} = [\ldots [A, 4A]]$; $4A^2+4 = 20, 40, 68, \ldots$;

$\sqrt{4A^2+7A+3} = [\ldots [1, 2, 1, (4A+2)]]$; $4A^2+7A+3 = 14, 33, 60, \ldots$

ВЫЧИСЛЯТЬ НЕПОЛНЫЕ ЧАСТНЫЕ КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ МЕШАЕТ БЫСТРАЯ ПОТЕРЯ ТОЧНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. Но нужно использовать, что $\frac{1}{\sqrt{A}+B} = \frac{\sqrt{A}-B}{A-B^2}$ и вычислять их алгебраически.

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ $\hat{a}$ НЕПОЛНЫХ ЧАСТНЫХ, СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЕРИОДЫ

Для частот $m_k \asymp 1/k^2$ неполных частных k (в статистике Гаусса–Кузьмина) среднее значение частного $\hat{a} = \infty$.

Для квадратичных иррациональностей x, для которых $x^2 + x + q = 0$, усредняя по q в указанных пределах, получим

$-q$	6	12	20	30	42	56
сумма неполных частных Σ^*	39	82	144	220	356	
сумма длин периодов T^*	15	28	44	56	89	
$\bar{a} = \frac{\Sigma^*}{T^*}$	2,6	2,9	3,3	3,9	4,0	

$\Rightarrow$ (среднее частное $\hat{a}(R)$, растёт, примерно, как R^{α}, $\alpha \approx 1{,}3$

(средняя длина периода, $\hat{T}(R)$, растёт, примерно, как R)

Чтобы достичь при $R \to \infty$ предела $\hat{a} = \infty$ (статистики Гаусса–Кузьмина) среднему неполному частному $\hat{a}(R)$ (по кругу $p^2 + q^2 \le R^2$) приходится расти.

Цепные дроби собственных чисел x.

Усреднение по целочисленным матрицам $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, в шаре $a^2+b^2+c^2+d^2 \le M$ радиуса $\sqrt{M}$.

$-p(A) = a+d$, $q(A) = ad-bc$

Чтобы вывести из статистики длин периодов $T(p,q)$ цепных дробей корней характеристических уравнений $x^2+px+q=0$, исследуем асимптотику распределения значений $p(A)$ и $q(A)$ при $M\to\infty$.

Случай $A\in End(\mathbb{Z}^2)$

(все целочисленные матрицы).

вначале наблюдается линейный рост средней длины $\hat{\tau}$ периода цепной дроби:

M	1	4	9	16
$\hat{\tau}$	0	0,1	0,47	0,65

$\hat{\tau}(M) \approx cM$

$c \approx 0{,}04$

Но ожидаемая при $M\to\infty$ асимптотика иная: $\hat{\tau}(M) \approx c_1\sqrt{M}$

Пример. Для $M=16$

наблюдено (выше) $\frac{960}{628}$ асимптотика $\frac{1024}{256}$

(сумма длин) / (число матриц)

Статистика длин $\hat{\tau}$ периодов цепных дробей собственных чисел x матриц $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ определителя единица (со следом $-p$): $x^2+px+q=0$.

1) **Число $Q_s(M)$ матриц $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ со следом s в шаре $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq M$:**

$$Q_s(M) \leq C_s M^{5/6} \quad \left(\begin{array}{l} \text{для } s=2 \\ Q_2(M) \leq C_2 |M| \ln M \end{array}\right)$$

(В.И. Арнольд, „Статистика целочисленных выпуклых многоугольников", 1980, Функан).

2) **Общее число матриц $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ в шаре радиуса $\sqrt{M}$**

$$G(S) \geq LM$$

3)

$p \geq 2$	2	3	≥ 4
$T(p,1)$	0	1	2

1,2,3 $\Rightarrow$ получается

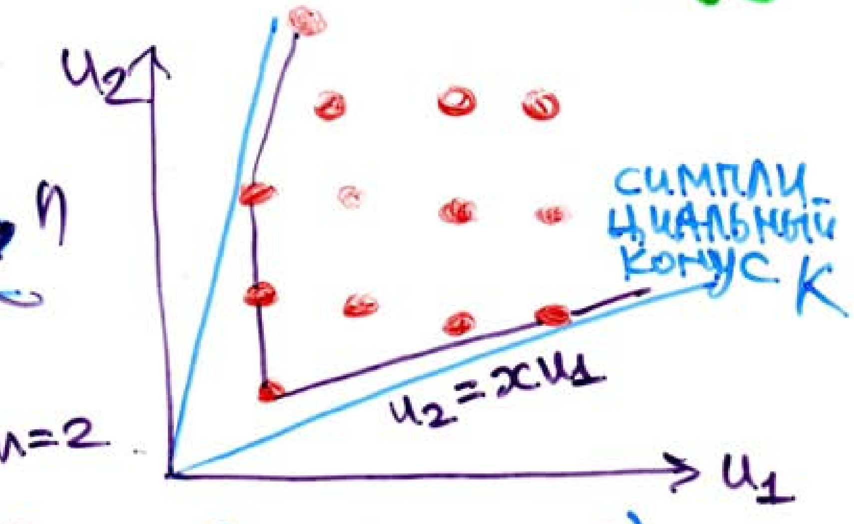
ТЕОРЕМА: средние $\hat{\tau}(M)$ длины периодов матриц $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ по шарам радиусов $\sqrt{M}$ стремятся при $M \to \infty$ к $\hat{\tau}(\infty)=2$.

Многомерные цепные дроби.

$K \subset \mathbb{R}^n \supset \mathbb{Z}^n$

открытый ортант между n гиперплоскостями (симплициальный конус с вершиной O)

$P = K \cap \mathbb{Z}^n$



P — полугруппа целых точек конуса K

$\overline{P}$ — её выпуклая оболочка

$\Gamma^{n-1} = \partial \overline{P}$ — парус конуса K.

(бесконечный многогранник) $\approx \mathbb{R}^{n-1}$

Парус Γ^{n-1} = (многомерная) цепная дробь конуса K

Пример: $n=2$, одна из сторон: $\{u_2 = x u_1\}$

$x = [a_1, a_2, \dots]$

$\{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ — целочисленные длины сторон паруса (вдоль $\{u_2 = x u_1\}$)

$\{a_2, a_4, \dots\}$ — целочисленные углы у вершин паруса

Теорема Tsuchihashi (Tohoku M.J. 1983):

$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ — корни (характеристического уравнения матрицы $A \in SL(n, \mathbb{Z})$)

Конус K ограничен собственными гиперплоскостями оператора $A \Longrightarrow$ многомерная цепная дробь конуса периодична (Г инвариантен относительно $\mathbb{Z}^{n-1}$

Группа $G \approx \mathbb{Z}^{n-1}$ симметрий паруса Γ^{n-1}

$$A \in (G \approx \mathbb{Z}^{n-1}) \subset SL(n,\mathbb{Z})$$

„Целочисленная Картановская" группа симметрий G конуса Γ состоит из (коммутирующих) матриц с теми же собственными векторами, что у оператора A.

Коркина, 1993: Топологическая периодичность многогранной структуры паруса конуса K $\Rightarrow \exists A \in SL(n,\mathbb{Z})$, для которого конус K ограничен собственными гиперплоскостями.

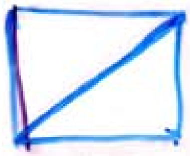
Фактор-„триангуляция" тора:

$$\frac{\Gamma^{n-1}}{G} \approx \frac{\mathbb{R}^{n-1}}{\mathbb{Z}^{n-1}} = T^{n-1}$$

этот тор разбит на выпуклые целочисленные многогранники (как и парус).

Пример. (Коркина, 1993).

„Трехмерное золотое сечение": $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (и только оно) порождает простейшую триангуляцию тора T^2 на 2 треугольника (без лишних целых точек, кроме вершин)

$T^2 =$  „**ТРИАНГУЛЯЦИЯ**" тора T^2.

КАКИЕ „ТРИАНГУЛЯЦИИ" ТОРА T^{n-1} РЕАЛИЗУЮТСЯ ОПЕРАТОРАМИ $A \in SL(n,\mathbb{Z})$? $n=3$?

Гипотеза (А): вопрос о реализуемости «триангуляции» алгоритмически неразрешим (как и вопрос об изоморфизме (кубических) полей, отвечающих двум триангуляциям тора T^2).

О. Карпенков: $\exists$ алгоритм, доставляющий много „триангуляций", которые реализуемы.

$\exists$ алгоритм, доставляющий много „триангуляций", которые не реализуемы.

Но вместе они доставляют не все «триангуляции».

[гипотеза (А) при $n>3$ может быть более легкой, чем в простейшем случае $n=3$]

СТАТИСТИКА МНОГОМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ.

ГИПОТЕЗА (А., 1989) Для многомерных цепных дробей существует аналог статистики Гаусса-Кузьмина, с ответами, одинаковыми для почти всех симплициальных конусов K, относительно граней паруса, включая, например:

- величины частот граней-треугольников,
- величины частот граней-k-угольников,
- статистики чисел ребер в вершинах,
- статистики целочисленных длин ребер,
- статистики целочисленных площадей граней

и т.д.

Сухов и Концевич, 1999: ответы на все эти вопросы СУЩЕСТВУЮТ, они универсальны (одинаковы для почти всех K в смысле меры Лебега).

НО НЕ НАЙДЕНЫ.

В.А. Быковский (с учениками) и О. Карпенков, 2007: ответы НАЙДЕНЫ (по-разному!)

ПЕРЕНЕСЕНИЕ СТАТИСТИК T(p/q) ДЛИН ПЕРИОДОВ (И РОСТА НЕПОЛНЫХ ЧАСТНЫХ) НА МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ.

Пусть $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ имеет вещественные (различные) собственные числа, $\{A: |A|^2 \leq M \to \infty\}$ – шар радиуса $\sqrt{M}$.

Найти распределения (асимптотически, при $M \to \infty$)

а) числа вершин триангуляций $\Gamma(A)/G(A)$;

в) числа граней (разных размерностей) этих триангуляций

с) сумм целочисленных объемов граней (разных размерностей) этих триангуляций;

d) чисел вершин, звезды которых имеют заданный топологический тип – например, ограничивают фиксированные числа ребер или граней.