Топологическая классификация функций и 16-я проблема Гильберта

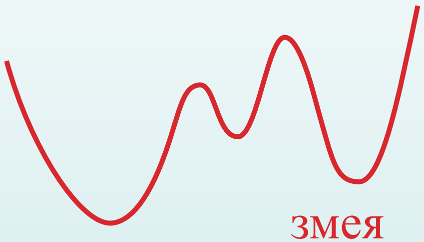
1868 А. Кэли: топология топографических карт = ?

Теория **Морса** **1965:** Морс, Уитни, Понтрягин $\longrightarrow$ безнадежно?

Топологическая **классификация** функций Морса

$f : S^1 \to \mathbb{R}$ Теория змей (Арнольд, 1992)

$2n$ критических точек $\Rightarrow \varphi(n)$ классов



$2n$	2	4	6	8	10
φ	1	2	16	272	7936

$$\operatorname{tg} t = \frac{1}{1!}\,t + \frac{2}{3!}\,t^3 + \frac{16}{5!}\,t^5 + \frac{272}{7!}\,t^7 + \cdots$$

$f : S^2 \to \mathbb{R}$

Арнольд, **2005**

$\boxed{\begin{array}{l} T \text{ седел } 2T+2 \text{ крит. точек} \\ \varphi(T) \text{ классов функций} \end{array}}$

T	1	2	3	4	5 (Nicolaescu, **2006**)
φ	2	19	428	17746	1178792

Асимптотики чисел классов функций с T седлами:

1) Арнольд, **2005** : Теорема:

$$aT^T < \varphi(T) < bT^{2T};$$

$\boxed{\text{гипотеза } A\colon \varphi \asymp T^{2T}}$

2) Теорема

Николаеску, **2006**: гипотеза Аверна. В **доказательстве**:

tg $\longmapsto$ эллиптический интеграл $\uparrow$

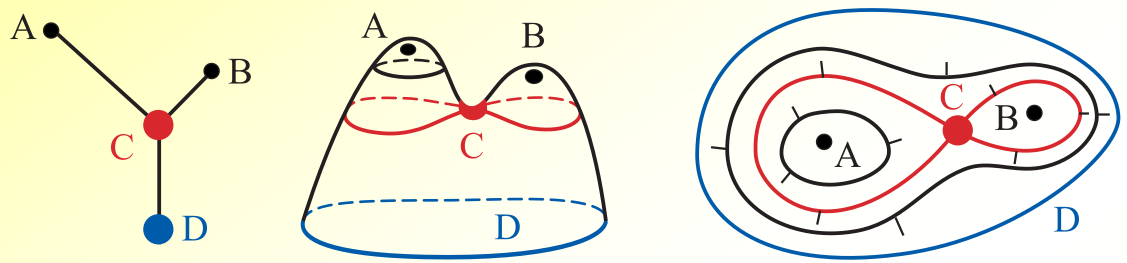
[Доказательство Гивенталя mirror symmetry квантовой теории поля]

(Гипотезы о случайных графах) $\Rightarrow \left(\varphi \asymp T^{2T}\right)$

Гипотеза: многочленами (нужной степени) Морса реализуется малая доля классов функций с T седлами

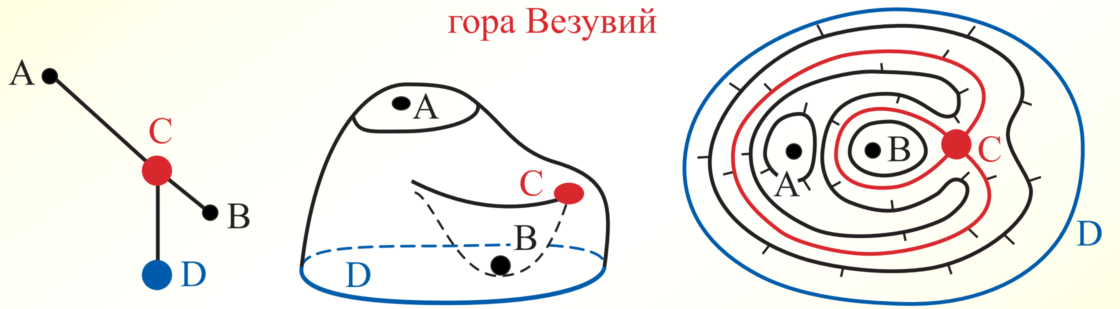
[Степень $2k$ соответствует $T = 2k(k-1)$]

гора Эльбрус



граф Γ   график   карта

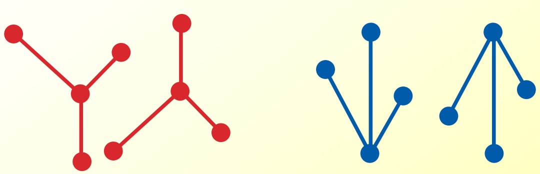
гора Везувий



граф Γ   график   карта

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & \mathbb{R} \\ & \Gamma \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

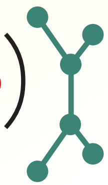
граф



возможно   невозможно

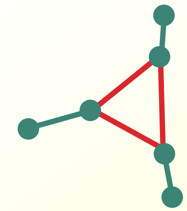
16 проблема Гильберта – о кривых уровня многочленов, но надо бы классифицировать многочлены! (и тригонометрические многочлены).

$\begin{pmatrix} M = S^n \\ n \geqslant 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\Gamma = \text{дерево})$

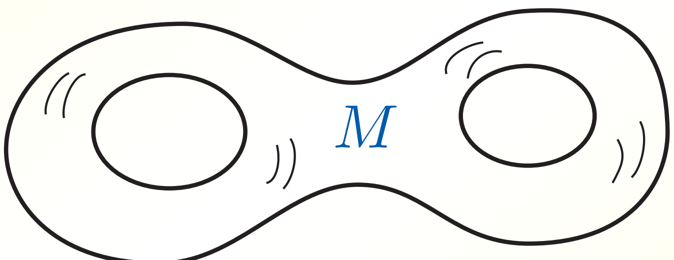


сфера

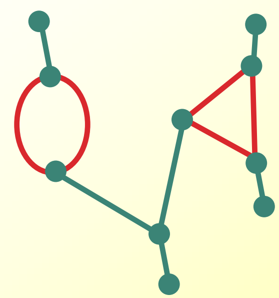
$(\underset{\text{тор}}{M = T^2}) \Rightarrow (\Gamma \text{ имеет 1 цикл})$



$(M = \text{поверхность рода } g) \Rightarrow (\Gamma \text{ имеет } g \text{ независимых циклов})$



$g = 2$ $\begin{pmatrix} \text{сфера} \\ \text{с } g \text{ ручками} \end{pmatrix}$



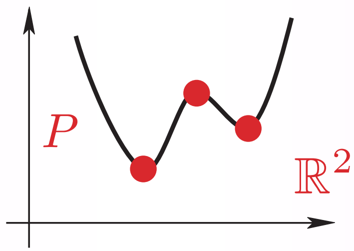
$g = 2$

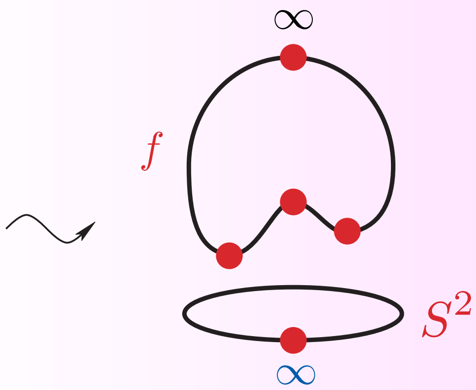
Топологическая классификация многочленов

$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ многочлен степени n

$\mathbb{R}^2 \coprod \infty = S^2$

$f\colon S^2 \to \mathbb{R}$





p имеет $\leqslant (n-1)^2$ критических точек.

f имеет $\leqslant (n-1)^2+1$ критическую точку.

($n=2k$, на бесконечности максимум, T седел)

$$\Downarrow$$

$$\left(4k^2-4k+2 = 2T+2, \quad T = 2k(k-1)\right)$$

$$(n=4, \quad k=2) \Rightarrow (T=4)$$

Число функций Морса с 4 седлами: $\varphi(4) = 17746$

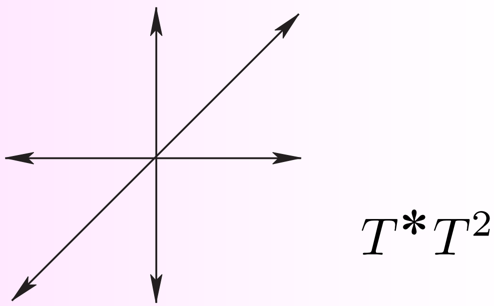
Число функций, реализуемых многочленами, ~ 1000.

Тригонометрические многочлены

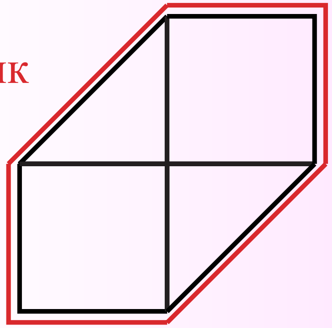
Пример. $f : T^2 \to \mathbb{R}$

$f \in \widetilde{A}_2$, степени 1 ($\widetilde{A}_2$ – аффинная группа Кокстера)

$$f = a\cos x + b\sin x + \cos y + d\sin y + p\cos(x+y) + q\sin(x+y)$$



спектр (волновые векторы)



площадь = 3

Число критических точек тригонометрического многочлена $f : T^n \to \mathbb{R}$ есть $n!\,V$, где V – объем многогранника Ньютона (в T^*T^n).

Пример. $\underset{\deg f = 1}{(f \in \widetilde{A}_2)} \Rightarrow \big(\text{критических точек} \leqslant (2!\,3 = 6)\big)$.

Diff – классификация функций $f : M \to \mathbb{R}$

$\boxed{h \in \mathrm{Diff}\, M}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "k"] \\ M \arrow[r, "\tilde f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f \sim \tilde f$:

$\tilde f \circ h = k \circ f$

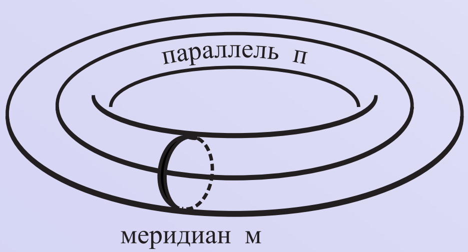
k сохраняет ориентацию оси значений

(либо $k(y) \equiv y$, а критические значения фиксированы)

Diff_0 – классификация функций $f : M \to \mathbb{R}$

$h \in (\mathrm{Diff}_0 M =$ компонента id в Diff$)$

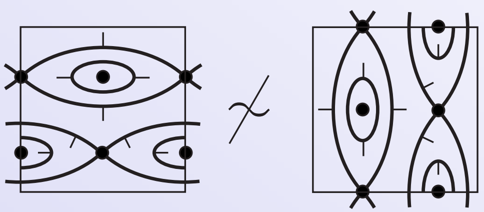
Пример: $M = T^2$



$h(\text{п}) = \text{п}$

$h(\text{м}) = \text{м}$

Различие обеих эквивалентностей



Diff – эквивалентны

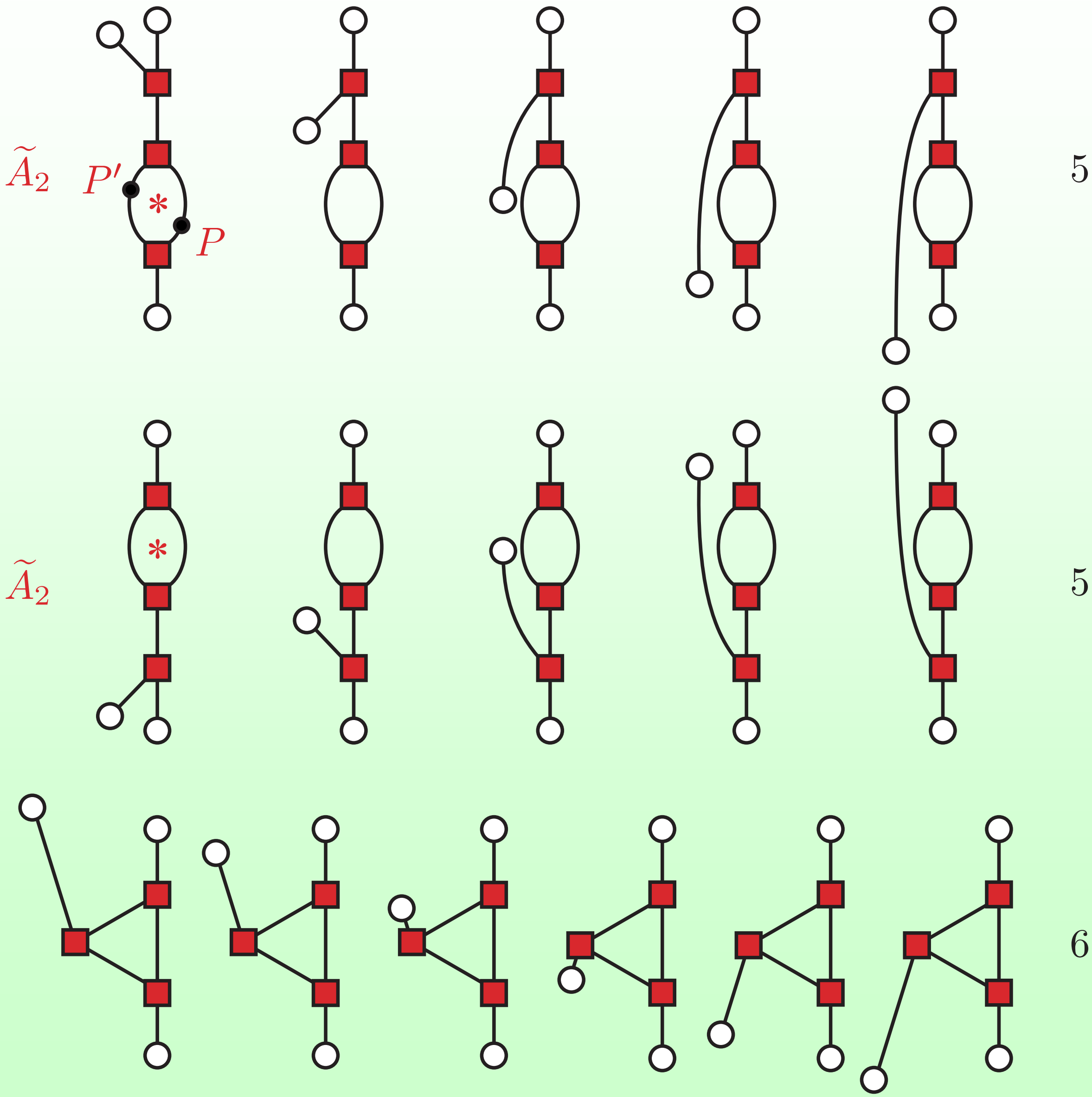
Diff_0 не эквивалентны

Числа классов функций на торе:

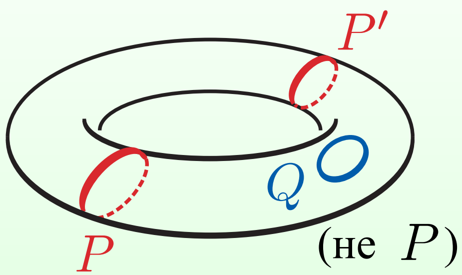
функции \ классификация	Diff	Diff_0
C^∞ $\widetilde{A}_2$, $\deg = 1$	**16** 2	∞ 6

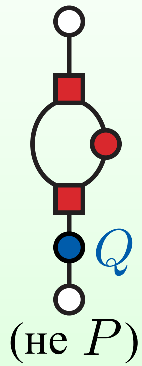
16 Diff-классов различаются графами:

Графы 16 функций $f: T^2 \to \mathbb{R}$ с тремя седлами ■:



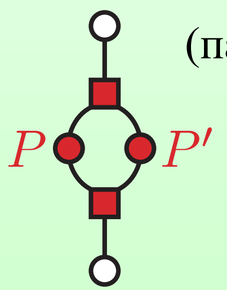
Классификация функций одного Diff-класса по Diff_0-типам:





(точка P не делит граф)

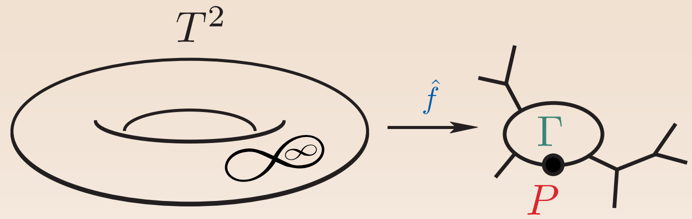
$\leftrightarrow$ (кривая P не гомологична 0 на торе)



(пара точек (P, P') делит граф)

$\leftrightarrow$ (кривые P и P' гомологичны на торе)

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\hat f"'] & & \mathbb{R} \\ & \Gamma \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$



Гомотопическая сложность отображения $\hat f$ оценивается диаграммой Ньютона тригонометрического многочлена f

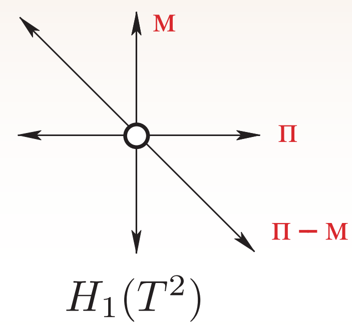
Пример: $f \in \widetilde{A}_2$ (класс Кокстера), $\deg = 1$

Теорема (Арнольд, 2006):

цикл P с точностью до знака,

либо параллель, либо меридиан, либо их разность

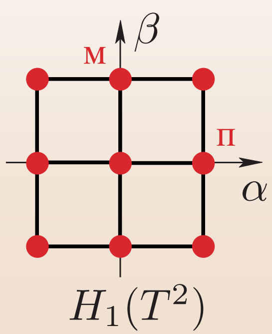
(6 случаев Diff_0-классификации многочленов $\widetilde{A}_2$ степени 1)

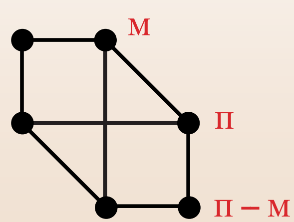


Доказательство. Эллиптическая кривая $\{f(x,g) = \mathrm{const}\}$ на T^2 пересекает прямые $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$ не более чем в двух точках.

$\Rightarrow$ цикл P есть α параллель + β меридиан, $|\alpha| \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$

$\alpha = \beta = 1$ невозможно, так как симметрии группы A_2 переводят $(1,1)$ в $(-2,1)$, $|-2| > 1$.





остается 6 возможностей

$\pm(1,0),\ \pm(0,1),\ \pm(1,-1)$

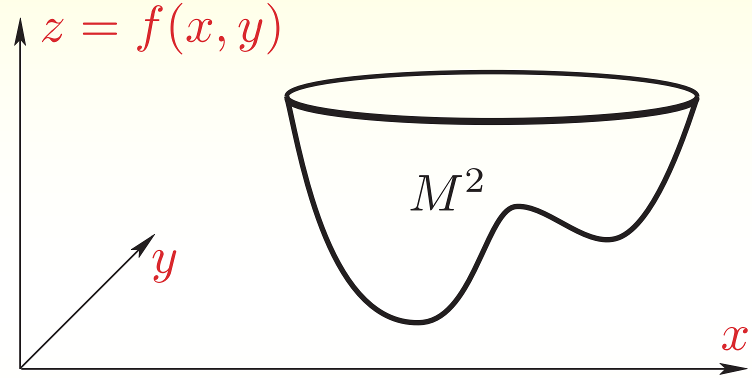
$\Rightarrow$ 6 классов $\pm$м, $\pm$п, $\pm$п − м.

Алгебраические геометры $\Rightarrow \varnothing$

Компьютерный вклад в вещественную и симплектическую алгебраическую геометрию: появился в 2006 г.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ многочлен степени n

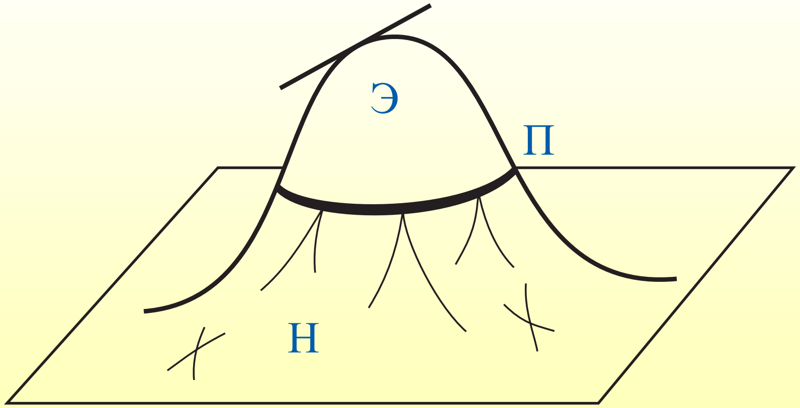
$M^2 \subset \mathbb{R}^3$ – его график



Э – эллиптические точки поверхности M (гауссова кривизна $K > 0$)

Н – гиперболические точки ($K < 0$)

П – параболическая кривая ($K = 0$)



Задача.

Каково наибольшее число $b(n)$, связных компонент параболической кривой П (в $\mathbb{R}P^2$) при $\deg f = n$?

Уравнение параболической кривой П: гессиан = 0

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема (А. Ортиц Родригес, 2005)

$$un^2 < b(n) < vn^2 \quad (v \approx 2u)$$

$$3 \leqslant b(4) \leqslant 4$$

Задача (О.Р.)

Бывает ли при $\deg f = 4$ четыре параболические кривые?
Равно ли $b(4)$ четырем?

За год непрерывной работы компьютера (2006) в Мехико А. Ортиц-Родригес

рассмотрела 50 миллионов многочленов f степени $4 = \deg f$.

На графиках трех из них оказалось по четыре параболические кривые.

Тем самым доказана

Теорема. В $b(4) = 4$ Гипотеза ?? $b(n) \sim wn^2$??

$M^2 \subset \mathbb{R}P^3$ – гладкая алгебраическая поверхность степени n

$B(n)$ – число ее параболических кривых Π $\left(\max\limits_{\deg M = n}\right)$

Теорема Ортиц-Родригес, 2005:

$$Un^3 < B(n) < Vn^3, \quad (V/U \approx 10)$$

Имеет ли $B(n)$ асимптотику Wn^3? $W =$?

$\mathbb{R}$ (вещественная) алгебраическая геометрия:

Плюккер	$\longrightarrow$	Сальмон	$\longrightarrow$	?
комплексные кривые		комплексные поверхности		вещественные поверхности

для кривых:

Характеристики:

$\left\{\begin{array}{l}\text{род}\\ \text{степень}\\ \text{число самопересечений}\\ \text{число точек возврата}\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{24 числа}\\ \text{для}\\ \text{поверхности}\end{array}\right. \longrightarrow ?$

$\left\{\begin{array}{l}\text{то же для}\\ \text{проективно}\\ \text{двойственной}\\ \text{кривой}\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{24 числа}\\ \text{для двойственной}\\ \text{поверхности}\end{array}\right. \longrightarrow ?$

для поверхностей:

Ф. Клейн перенес теорию Плюккера на $\mathbb{R}$-кривые, но теория Сальмона на $\mathbb{R}$ -поверхности пока не перенесена

Их связывают

Формулы Плюккера $\longrightarrow$ 47 формул Сальмона $\longrightarrow$?