МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
“АНАЛИЗ И ОСОБЕННОСТИ”

посвященная 70-летию

Владимира Игоревича Арнольда

Тезисы докладов

МИАН, Москва

20 – 24 августа 2007 г.

Russian Academy of Sciences
Steklov Mathematics Institute

in cooperation with
Moscow State University
Moscow Mathematical Society
Moscow Independent University

INTERNATIONAL CONFERENCE
"ANALYSIS and SINGULARITIES"

dedicated to the 70th anniversary of

Vladimir Igorevich Arnold

Abstracts

Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia
August 20 – 24, 2007

Moscow 2007

Российская академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова

при участии
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
Московского математического общества
Московского независимого университета

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ “АНАЛИЗ И ОСОБЕННОСТИ”

посвященная 70-летию

Владимира Игоревича Арнольда

Тезисы докладов

МИАН, Москва
20 – 24 августа 2007 г.

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Международной конференции “Анализ и особенности”, посвященной 70-летию В.И. Арнольда.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Статистика периодических и многомерных цепных дробей

Арнольд В. И. (Россия)
Математический институт им. В. А. Стеклова

Все неполные частные цепной дроби золотого сечения равны 1, но для случайного вещественного числа доля единиц среди неполных частных его цепной дроби гораздо меньше. Пропорции, в которых встречаются разные неполные частные, одинаковы для цепных дробей почти всех вещественных чисел. Они были найдены Гауссом и доказаны Кузьминым в 1928 году.

Для квадратичных иррациональностей цепные дроби периодичны. Я несколько десятков лет назад высказал гипотезу, что статистика их неполных частных в среднем такая же, как и для случайного вещественного числа. Усреднение производится здесь, например, по кругам $p^2+q^2 \leqslant R^2$ на плоскости квадратных уравнений $x^2+px+q=0$. Когда радиус R стремится к бесконечности, доля, скажем, единиц (или любых конечных комбинаций неполных частных) среди элементов периодов цепных дробей всех иррациональностей круга стремится к доле единиц (или тех же комбинаций) для случайных вещественных чисел.

Эта моя гипотеза была недавно доказана В. А. Быковским и его учениками.

Но этим не исчерпывается статистика неполных частных квадратичных иррациональностей. Например, в качестве периодов (для упомянутых выше кругов) встречаются вовсе не любые конечные последовательности, удовлетворяющие статистике Гаусса–Кузьмина, а только палиндромы (последовательности, которые не меняются, если читать их задом наперед).

Палиндромами являются также периоды цепных дробей квадратных корней из рациональных чисел (для квадратных корней из целых чисел это открыл уже Галуа; полные доказательства открытых мною палиндромичностей дали мои ученицы Ф. Аикарди и М. Павловская).

В докладе будет рассказано об удивительных эмпирических и доказанных свойствах неполных частных цепных дробей квадратичных иррациональностей, в том числе о средней скорости роста длины периода $T(p,q)$ в зависимости от величины коэффициентов квадратного уравнения.

Оказывается, что средняя длина T периода растет примерно как квадратный корень из дискриминанта квадратного уравнения, т.е. как cR для средних по кругам радиусов R:

R	4	20	36	52	68	84	100
T	0.7	3.8	6.4	8.6	10.9	13.1	15.1

Топологическая классификация функций Морса и 16-я проблема Гильберта

Арнольд В. И. (Россия)
Математический институт им. В. А. Стеклова

Гильберт спрашивает в своей 16-й проблеме, как классифицируются топологически гладкие кривые на вещественной плоскости с декартовыми координатами x и y, заданные уравнениями $f(x, y) = 0$, где f – многочлен фиксированной степени.

В настоящем докладе обсуждается (более естественный для многих приложений) вопрос о топологической классификации не линий уровня, а самих многочленов данной степени (или более общим образом, гладких функций Морса с фиксированным числом критических точек).

Для функций на окружности топологические классы перечисляются коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции тангенс.

Для функций Морса с T седлами на двумерной сфере число классов было недавно оценено мною снизу и сверху величинами T^T и T^{2T}, причем я сформулировал гипотезу, что вторая оценка близка к истинной асимптотически (для $T = 4$ число классов я нашел равным 17746).

Моя гипотеза была затем доказана Л. Николаеску, нашедшим также и точное выражение для числа классов: тангенс заменяется в этом случае некоторым эллиптическим интегралом, подобным тем асимптотикам, при помощи которых А. Б. Гивенталь доказал гипотезу зеркальной симметрии квантовой теории поля.

В докладе будет рассказано о моих результатах теории случайных графов, на которых основаны и мои оценки, и доказательства Николаеску, а также об обобщении этой теории на случай функций на торе (и тригонометрических многочленов вместо обычных).

Удивительным отличием тора от сферы является то, что число классов топологической эквивалентности функций Морса с заданным числом критических точек оказывается для тора бесконечным, если классифицировать функции на торе с использованием связной компоненты группы диффеоморфизмов тора (т.е. не переставлять, например, параллели и меридианы при установлении топологической одинаковости функций).

Несмотря на это, число (так же определенных топологически) классов тригонометрических многочленов фиксированной степени оказывается конечным (так как степени негомотопности тождеству нужных в этом случае диффеоморфизмов тора ограничены для тригонометрических многочленов ограниченной степени).

Доказательства этих результатов основаны на нетривиальной вещественной алгебраической геометрии, но в докладе будут сформулированы и не доказанные еще обобщения полученных результатов. Например, вопросы о скорости роста числа многочленов (для случая сферы) или тригонометрических многочленов (для случая тора) с ростом числа критических точек остаются открытыми: сверхэкспоненциальный рост T^{2T} для гладких функций вправе смениться даже на степенной рост типа T^{const} для случая многочленов.

Корректная разрешимость краевой задачи с нелокальным условием для системы гиперболических уравнений первого порядка

Абдикаликова Г. А. (Казахстан)
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
aiman-80@mail.ru

На $\overline{\Omega} = \{(x,t) : t \leqslant x \leqslant t+\omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$ рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = A(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(s)u(s,0) + C(s)u(s+T,T) = d(s), \quad s \in [0,\omega], \tag{2}$$

где $A(x,t)$ – $(n \times n)$-матрица, $f(x,t)$ – n-вектор-функция непрерывны по x и t на $\overline{\Omega}$; $B(s)$, $C(s)$ – $(n \times n)$-матрицы, $d(s)$ – n-вектор-функция непрерывны на $[0,\omega]$.

Среди краевых задач набольший интерес представляют нелокальные задачи для некоторых классов уравнения с частными производными. В [1] методом введения функциональных параметров, являющегося развитием метода параметризации [2], установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений со смешанной производной.

Целью работы является нахождение коэффициентных достаточных условий корректной и однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

В сообщении, используя метод характеристик, задача (1)–(2) сводится к семейству линейных двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на $H = \{(\xi,\tau) : 0 \leqslant \xi \leqslant \omega,$ $0 \leqslant \tau \leqslant T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$.

Коэффициентные достаточные условия корректной и однозначной разрешимости задачи в терминах обратимости матрицы $Q_\nu(\xi,h)$, составленной по матрицам $A(x,t)$, $B(s)$, $C(s)$ устанавливается теоремой.

Теорема. *Пусть при некоторых* $h > 0$: $Nh = T$, *и* ν, $\nu = 1,2,\ldots$, $(nN \times nN)$-*матрица* $Q_\nu(\xi,h)$ *обратима при всех* $\xi \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства*:

а) $\|[Q_\nu(\xi,h)]^{-1}\| \leqslant \gamma_\nu(h)$;

б) $q_\nu(\xi,h) = \gamma_\nu(h)\max\{1, h\|C(\xi)\|\}\big[e^{\alpha(\xi)h} - 1 - \alpha(\xi)h - \cdots - \frac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!}\big] \leqslant \sigma < 1$,

где $\alpha(\xi) = \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{A}(\xi,\tau)\|$, $\sigma = \text{const}$.

Тогда существует единственное решение $\widetilde{u}^\star(\xi,\tau)$ *задачи* (1)–(2).

Предложен алгоритм нахождения решения. Установлено существование решения в широком смысле по Фридрихсу [3].

Литература

[1] Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295–297.

[2] Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.

[3] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968. 592 с.

Задачи идентификации для стационарных моделей тепломассопереноса

Алексеев Г. В. (Россия)
Институт прикладной математики ДВО РАН
alekseev@iam.dvo.ru
Соболева О.В. (Россия)
Институт прикладной математики ДВО РАН
Терешко Д. А. (Россия)
Институт прикладной математики ДВО РАН

Большое внимание в последнее время уделяется исследованию задач оптимального управления для моделей тепломассопереноса. В гидродинамике и тепловой конвекции они возникли в связи с необходимостью установления наиболее эффективных механизмов управления термогидродинамическими процессами. В инженерной экологии задачи такого рода возникли при решении актуальных проблем, связанных с защитой окружающей среды от антропогенных возмущений.

Наряду с задачами оптимального управления важную роль в приложениях играют задачи идентификации для моделей тепло- и массопереноса. Они заключаются в восстановлении неизвестных плотностей граничных или распределенных источников либо коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения или граничные условия модели, по дополнительной информации о решении исходной краевой задачи. Важно отметить, что исследование задач идентификации можно свести к исследованию соответствующих экстремальных задач при определенном выборе минимизируемого функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче. Это позволяет исследовать как задачи управления, так и обратные задачи с единых позиций теории задач условной оптимизации в гильбертовых или банаховых пространствах.

Целью настоящей работы является теоретический анализ задач идентификации для следующей модели тепломассопереноса, описывающей перенос вещества в вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u} + \mathrm{grad}p = \mathbf{f} + (\beta_C C - \beta_T T)\mathbf{G} \ \text{ в } \ \Omega, \tag{1}$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \ \text{ на } \ \Gamma,$$
$$-\lambda\Delta T + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,T = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad T = \psi \ \text{ на } \ \Gamma_D, \tag{2}$$
$$\lambda(\partial T/\partial n + \alpha T) = \chi \ \text{ на } \ \Gamma_N,$$
$$-\lambda_c\Delta C + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,C + kC = f_c \ \text{ в } \ \Omega, \quad C = \psi_c \ \text{ на } \ \Gamma_D, \tag{3}$$
$$\lambda_c(\partial C/\partial n + \alpha_c C) = \chi_c \ \text{ на } \ \Gamma_N.$$

Здесь используются обычные обозначения (см. [1]). В частности, Ω – ограниченная область из пространства $\mathbf{R}^d$, $d = 2,3$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N, $\mathbf{u}$, T и C – скорость, температура и концентрация (загрязняющего) вещества в жидкости, $p = P/\rho$, где P – давление, $\rho = \mathrm{const} > 0$ – плотность среды, $\nu = \mathrm{const} > 0$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$ и $\lambda_c = \mathrm{const} > 0$ – коэффициенты вязкости, температуропроводности и диффузии, $\mathbf{f}$, f и f_c – объемные плотности внешних массовых сил, источников тепла и вещества,

$\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ – вектор ускорения свободного падения, β_T, β_C, $\mathbf{g}$, ψ, ψ_c, α, α_c, χ и χ_c – некоторые функции.

Отметим, что краевая задача (1)–(3) содержит параметры ν, λ, λ_c, k, β_T, β_C, α, α_c и функции, описывающие плотности граничных и распределенных источников. Ясно, что для нахождения ее решения значения всех параметров, граничных функций и плотностей источников должны быть заданы. Однако на практике часто возникают ситуации, когда некоторые из этих параметров или плотностей неизвестны. В этом случае возникает проблема определения неизвестных параметров модели вместе с решением $(\mathbf{u}, p, T, C)$ по определенной информации об основном состоянии. Такого типа проблемы возникают, например, в задачах трансграничного переноса загрязняющих веществ.

В данной работе исследуются коэффициентные задачи идентификации для модели (1)–(3), заключающиеся в нахождении неизвестных функциональных коэффициентов α, α_c и k и решения $(\mathbf{u}, p, T, C)$ по дополнительной информации о решении. Для исследования рассматриваемых задач в работе применяется методика, разработанная в предыдущих работах авторов по задачам управления для стационарных моделей гидродинамики и тепловой конвекции (см., например, [2]–[4]). Доказывается их разрешимость, выводятся и анализируются системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. Основное внимание уделяется исследованию вопроса о локальной единственности и устойчивости решений рассматриваемых задач идентификации. Сложность исследования этого вопроса связана с тем обстоятельством, что коэффициентные задачи идентификации характеризуются двойной нелинейностью. Первая связана с нелинейностью исходной модели (1)–(3), вторая с нелинейным вхождением в модель (1)–(3) (в виде множителей при T или C) неизвестных функций α, α_c и k. Тем не менее, структура дифференциальных уравнений, составляющих модель (1)–(3), такова, что с помощью детального анализа выведенных систем оптимальности удается установить достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие локальную единственность (и устойчивость) решений конкретных задач управления.

Указанные условия локальной единственности имеют громоздкий вид. Чтобы сделать их более наглядными, вводятся аналоги широко используемых в гидродинамике безразмерных параметров – числа Рейнольдса, а также температурного и диффузионного чисел Рэлея и Прандтля. С использованием безразмерных параметров указанные условия единственности могут быть записаны в достаточно простой форме, близкой к форме условий единственности коэффициентных задач идентификации для стационарного линейного уравнения конвекции-диффузии-реакции.

Работа поддержана грантом НШ-9004.2006.1, грантом РФФИ 06-01-96020-р_восток_а и грантами ДВО РАН (проекты 06-I-П22-086, 06-II-СО-03-010, 06-III-А-01-011, 06-III-А-03-072).

Литература

[1] Алексеев Г. В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 6. – С. 1055–1076.

[2] Alekseev G. V., Tereshko D. A. On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 1998. – V. 6, № 6. – P. 521–562.

[3] Алексеев Г. В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 971–991.

[4] Алексеев Г. В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции // Вестник НГУ. Сер. мат. мех. информ. – 2006. – Т. 6. – С. 6–32.

Априорные оценки решений уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Бицадзе–Самарского и Самарского–Ионкина

Алиханов А. А. (Россия)
Кабардино-Балкарский государственный университет
`alikhanov-tom@yandex.ru`

В работах [1]–[3] изучены нелокальные краевые задачи типа Бицадзе–Самарского и Самарского–Ионкина для обыкновенных дифференциальных уравнений в дифференциальной и разностной трактовках. Работа [3] посвящена нелокальной краевой задаче типа Бицадзе–Самарского для уравнения теплопроводности в разностной трактовке. В работе [4] изучена нелокальная задача типа Самарского–Ионкина для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В работах [5], [6] изучены устойчивость нелокальной разностной задачи для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Предложенная в работах [4], [5] методика, основанная на метоте разделение переменных, не распространяется на случай уравнения с переменными коэффициентами.

В данной работе получены априорные оценки дифференциальной задачи для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами с нелокальными условиями типа Бицадзе–Самарского и Самарского–Ионкина.

1. Краевая задача с нелокальными условиями типа Бицадзе–Самарского. В прямоугольнике

$$\overline{Q}_T = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t),\ \ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = \alpha(t)u(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где $0 < c_1 \leqslant k(x,t) \leqslant c_2$, $|k_x(x,t)| \leqslant c_3$, $q(x,t) \geqslant 0$, $|\alpha(t)| \leqslant \alpha_0$.

Предполагая существование регулярного решения задачи (1)–(3) методом энергетических неравенств получена априорная оценка

$$\int_0^t \|u\|_0^2\, d\tau \leqslant M \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right), \tag{4}$$

где $\|u\|_0^2 = \int_0^l u^2\, dx$, $M > 0$ – известная постоянная, зависящая от c_1, c_2, c_3, α_0, l, T.

2. Краевая задача с нелокальными условиями типа Самарского–Ионкина. В прямоугольнике

$$\overline{Q}_T = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x,t)u + f(x,t),\ \ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{5}$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u_x(l,t) = \alpha(t)u_x(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где $0 < c_1 \leqslant k(x,t) \leqslant c_2$, $|k_x|, |k_t|, |q_t| \leqslant c_3$, $q(x,t) \geqslant 0$, $|\alpha(t)| \leqslant \alpha_0$.

Предполагая существование регулярного решения задачи (5)–(7) методом энергетических неравенств получена априорная оценка

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t \|u_x\|_0^2\, d\tau \leqslant M \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)} \right), \tag{8}$$

где $M > 0$ известная постоянная зависящая от c_1, c_2, c_3, α_0, l, T.

Из априорных оценк (4) и (8) следует единственность и непрерывная зависимость решения задач (1)–(3) и (5)–(7) от входных данных.

Литература

[1] *Ильин В. А., Моисеев Е. Н.* // Докл. АН СССР. 1986. – Т. 291, № 3. – С. 534–539.

[2] *Ильин В. А., Моисеев Е. Н.* // Дифференц. уравнения. 1987. – Т. 23, № 8. – С. 1422–1431.

[3] *Шхануков М. Х.* // Докл. Адыг.(Черкес.) Междунар. акад. наук. 1994. – Т. 1, № 1. – С. 38–42.

[4] *Ионкин Н. И.* // Дифференц. уравнения. 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

[5] *Гулин А. В., Морозова В. А.* // Дифференц. уравнения. 2003. – Т. 39, № 7. – С. 912–917.

[6] *Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А.* // Дифференц. уравнения. 2006. – Т. 42, № 7. – С. 914–923.

Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности

Ахметьев П. М. (Россия)
ИЗМИРАН
pmakhmet@mi.ras.ru

Замечено, что значение интеграла токовой спиральности для тонкой магнитной трубки пропорционально значению интеграла Tw (определение см. в [1]), входящему слагаемым в интеграл магнитной спиральности. На основе этого вычисления проанализировано уравнение Фарадея для магнитного поля в жидкой проводящей среде и получено простое геометрическое объяснение закона изменения магнитной спиральности при ненулевом коэффициенте магнитной диффузии. Результат получен совместно с О. В. Кунаковской и В. А. Кутвицким.

Далее обсудим подход к решению проблем [2] (1990-16, 1984-12).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-00993.

Литература

[1] Moffatt H. K. and Ricca R. L., Helicity and Calugareanu invariant // Proc. R. Soc. Lond. A (1992) 439, 411–429.

[2] Арнольд В. И., Задачи Арнольда // Москва, Фазис, 2000.

Сингулярная задача Римана–Гильберта

Безродных С. И. (Россия)
Вычислительный центр РАН
sergeyib@pochta.ru
Власов В. И. (Россия)
Вычислительный центр РАН
vlasov@ccas.ru

Рассматривается задача Римана–Гильберта, заключающаяся в нахождении аналитической в верхней полуплоскости $\mathbf{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, функции $\mathcal{P}^+ = u + iv$ по заданному на вещественной оси $\mathbf{R}$ соотношению

$$\operatorname{Re}\left[\, h(x)\, \mathcal{P}^+(x) \,\right] = c(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где h и c – кусочно-гёльдеровы функции (коэффициенты задачи) с разрывами первого рода в точках множества $\{x_k\} := \{x_0, x_1, \ldots, x_K\}$; здесь $x_0 := \infty$. Решение $\mathcal{P}^+$ задачи (1) ищется в классе аналитичных в $\mathbf{H}^+$ и непрерывных в $\overline{\mathbf{H}^+} \setminus \{x_k\}$ функций, удовлетворяющих в точке x_0 соотношению $\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{O}(z^{\alpha_0 + n_0})$, $z \to x_0$, а в точках x_k, $k = \overline{1, K}$ следующим соотношениям: $\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{O}\big[(z - x_k)^{\alpha_k - n_k}\big]$, если $n_k \neq 0$, и $\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{O}(1)$, если $n_k = 0$. Здесь $n_k \in \mathbf{Z}^+$ – заданные целые числа, а α_k – дробные части величин δ_k, определяемых по формулам $\delta_0 := \pi^{-1}\left[\arg h(+\infty) - \arg h(-\infty)\right]$, $\delta_k = \pi^{-1}\left[\arg h(x_k + 0) - \arg h(x_k - 0)\right]$, $k > 0$. Целые части этих величин обозначим μ_k (т.е. $\mu_k := [\delta_k]$). Для сформулированной задачи Римана–Гильберта с дополнительными условиями роста (сингулярной задачи) установлены теоремы разрешимости, а искомая функция $\mathcal{P}^+$ выписана через модифицированные интегралы типа Коши.

Отдельно рассмотрена задача (1) с кусочно-постоянными коэффициентами (т.е. когда при $x \in (x_k, x_{k+1})$ выполняются равенства $h(x) = h_k$, $c(x) = c_k$), в связи с тем, что в таком случае искомая функция $\mathcal{P}^+$ допускает яркую геометрическую интерпретацию. Действительно, перепишем краевое условие (1) в виде $au - bv = c$, где $a + ib = h$. Поскольку при постоянных a, b, c такое соотношение представляет собой уравнение прямой на плоскости $w = u + iv$, то в случае кусочно-постоянных коэффициентов естественно было бы ожидать, что образом $\mathcal{P}^+(\mathbf{R})$ является многоугольный контур, а само решение $w = \mathcal{P}^+(z)$ осуществляет конформное отображение полуплоскости $\mathbf{H}^+$ на некоторый неоднолистный многоугольник. Реализацией сформулированной трактовки решения задачи Римана–Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами является найденное в настоящей работе его представление в виде обобщенного интеграла Кристоффеля–Шварца. Прежде чем его выписать, сформулируем теорему о разрешимости рассматриваемой сингулярной задачи с кусочно-постояннми коэффициентами (предполагая $\alpha_k \neq 0$, $k = \overline{0, K}$).

Теорема. (i) *Если индекс* $\mu := n_0 - \mu_0 + \sum_{k=1}^{K}(\mu_k + n_k)$ *неотрицателен, то решение* $\mathcal{P}^+$ *сингулярной задачи Римана–Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами имеет вид*

$$\mathcal{P}^+(z) = \mathcal{X}^+(z)\big[P_\mu(z) + \mathcal{F}^+(z)\big], \tag{2}$$

где $P_\mu(z)$ *– произвольный полином степени* μ *с вещественными коэффициентами,* $\mathcal{X}^+(\zeta) := ie^{-\arg h_K}\prod_{k=1}^{K}(z - x_k)^{\alpha_k - n_k}$ *– каноническое решение задачи, а* $\mathcal{F}^+$ *определяется по формуле*

$$\mathcal{F}^+(z) := \sum_{k=0}^{K}\frac{c_k(z-\lambda_k)^\mu}{h_k \pi i}\int_{\mathcal{L}_k}\frac{(t-\lambda_k)^{-\mu}}{\mathcal{X}^+(t)(t-z)}\,dt;$$

здесь $\mathcal{L}_0 := (-\infty, x_1)$, $\mathcal{L}_k := (\xi_k, \xi_{k+1})$, $\mathcal{L}_K := (\xi_K, +\infty)$, $\lambda_k \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{L}_k$.

(ii) *Если* $\mu = -1$, *то единственное решение задачи дается формулой* (2), *где* $P_\mu \equiv 0$, *а в формуле для* $\mathcal{F}^+$ *следует положить* $\mu = 0$. *Если* $\mu < -1$, *то для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнения условий* $\int_{\mathbf{R}}\frac{t^n c(t)}{h(t)\mathcal{X}^+(t)}\,dt = 0$, $n = \overline{0, |\mu| - 2}$, *а само решение дается той же формулой, что и при* $\mu = -1$.

Представление (2) для функции $\mathcal{P}^+$ было преобразовано к виду обобщенного интеграла Кристоффеля–Шварца:

$$\mathcal{P}^+(z) = ie^{-\arg h_K}\int_{z_*}^{z}\prod_{k=1}^{K}(t - x_k)^{\alpha_k - n_k - 1}R(t)\,dt + w_*, \tag{3}$$

где R – полином с вещественными коэффициентами. Такое преобразование удалось осуществить при помощи найденной в работе формулы типа Якоби для функции Лауричеллы $F_D^{(n)}$ – гипергеометрической функции многих комплексных переменных. Указанная формула дает выражение для производной от произведения некоторых биномов на функцию Лауричеллы в виде произведения (других) биномов и полинома. Коэффициенты полинома R в формуле (3) выписаны явно в терминах функции Лауричеллы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503), программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 и программы РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики".

Размерность Хаусдорфа множества хорошо аппроксимируемых точек на гладких кривых

Берник В. И. (Беларусь)
Институт математики НАН Беларуси
bernik@im.bas-net.by
Ковалевская Э. И. (Беларусь)
Белорусский государственный аграрный технический университет
ekovalevsk@mail.ru
Морозова И. М. (Беларусь)
Белорусский государственный аграрный технический университет
INNA.MOROZOVA@tut.by

Метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях возникла из работ В. Г. Спринджука и В. М. Шмидта (1964–1977 гг.). Она интенсивно развивается в настоящее время [2]. Для изучения исключительных множеств в ней используется размерность Хаусдорфа [3]. Это связано с тем, что размерность Хаусдорфа дает дополнительную информацию о множествах нулевой меры. Именно, с ее помощью можно точнее описать размер множества. Такие результаты метрической теории чисел находят свое применение в так называемой проблеме малых знаменателей [1].

Пусть $P_n = P_n(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x^n + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$, $H = \max_{0\leqslant j\leqslant n}(|a_j|)$ – высота многочлена P_n. Легко получить, что неравенство $|P_n(x)| < H^{-n}$ имеет бесконечно много решений в многочленах P_n. А. Я. Хинчин (1926 г.) доказал более точное утверждение: для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, неравенство $|P_n(x)| < \varepsilon H^{-n}$ имеет бесконечно много решений в многочленах P_n. Пусть $\mathcal{M}_n(w)$ – множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P_n(x)| < H^{-w}$ выполняется бесконечно часто в целочисленных многочленах P_n. К. Малер (1932 г.) установил, что при $w > 4n$ множество $\mathcal{M}_n(w)$ имеет нулевую меру Лебега. С другой стороны, Хинчин доказал, что существуют такие числа $\gamma \in \mathbb{R}$, что неравенства $CH^{-n} < |P_n(\gamma)| < H^{-n}$, где константа C зависит только от γ и n, $0 < C < 1$, имеет бесконечно много решений в многочленах P_n. Эти результаты были значительно усилены и обобщены в работах Спринджука, Шмидта и их последователей.

Пусть $\Psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция и $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ – вещественные, определенные на интервале I, m раз непрерывно дифференцируемые функции, причем $1, f_1(x), \ldots, f_n(x)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, \Psi)$ обозначает множество точек $x \in I$, для которых неравенство

$$|a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x) + a_0| < H^{n-1}\Psi(H), \tag{1}$$

где $H = \max_{0 \leqslant j \leqslant n}(|a_j|)$, имеет бесконечно много решений в целых векторах $(a_n, \ldots, a_0)$. В [2] доказано, что множество $\mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, \Psi)$ имеет нулевую меру Лебега, если ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)$ сходится, и имеет полную меру Лебега, если указанный ряд расходится.

Чтобы сформулировать полученный нами результат, заменим в неравенстве (1) правую часть на величину H^{-w}, где $w > 0$, и введем множество $\mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, w)$ аналогично множеству $\mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, \Psi)$. Обозначим через $\dim \mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, w)$ размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, w)$. Доказана

Теорема. *При* $w > \frac{n(n+2)}{4} - 1$ *имеем*

$$\frac{n+1}{w+1} \leqslant \dim \mathcal{L}_n(f_1, f_2, \ldots, f_n, w) \leqslant \frac{n(n+2)}{4(w+1)}.$$

Работа выполнена в рамках государственной программы фундаментальных исследований Беларуси “Математические модели”.

Литература

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. 18. N 6. C. 91–192. Ivanov I. I. Method of theory of functions at the boundary problems on the plate // Diff. equations. – 1997. N 8. P. 1069–1075.

[2] Beresnevich V., Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. Metric Diophantine approximation: The Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Moscow Math. J. – 2002. 2. C. 203–225.

[3] Dodson M. M., Kristensen S. Hausdorff dimension and Diophantine approximation // Proc. Simposia in Pure Math. – 2004. 72. N 1. C. 305–347.

Об энтропии приводимых кос

Бирюков О. Н. (Россия)
Коломенский государственный педагогический институт, Коломна
Oleg_Biryukov.81@mail.ru

Рассматривается поверхность M – двумерный диск с граничной окружностью γ, из внутренности которого удалены n открытых дисков. Хорошо известно, что гомеотопии (изотопические классы гомеоморфизмов) поверхности M, неподвижные на компоненте границы γ, образуют группу кос Артина $Br(n)$ из n нитей.

Для элементов этой группы существует известная классификация Нильсена–Тёрстона, согласно которой гомеотопии любой гиперболической поверхности разбиваются на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Каждая коса является либо псевдоаносовским, либо приводимым изотопическим классом.

Итерации гомеоморфизма, представляющего некоторую косу, задают динамическую систему с дискретным временем. Одной из важных характеристик динамической системы является топологическая энтропия, описывающая экспоненциальную скорость роста числа «различимых» траекторий при итерациях в системе. В качестве энтропии косы можно положить минимум топологической энтропии по изотопическому классу.

В 1995 году М. Бествина и М. Хендел [2] предложили алгоритм для вычисления энтропии псевдоаносовских кос. Данный алгоритм являлся модификацией другого алгоритма этих же авторов [1], который определял неприводимость внешнего автоморфизма свободной группы.

Алгоритм Бествины и Хендела можно распространить на случай приводимых кос.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00085.

Литература

[1] M. Bestvina and M. Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. Ann. of Math., 135 (1992), 1–51.

[2] M. Bestvina and M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. Topology, 34 (1), 109–140, 1995.

Задание группы крашеных кос типа B с помощью симметрических скручиваний

Бирюков С. Н. (Россия)
Коломенский государственный педагогический институт, Коломна
`sergeybirukov@yandex.ru`

В начале прошлого века Артин (Artin) дал стандартные определения группе кос и группе крашеных кос. В 1998 году Бирман (Birman), Ко (Ko) и Ли (Lee) предложили новое представление группы кос, которое затем было достаточно часто использовано (например, в работах

Т. Брейди (T. Brady) и Д. Краммера (D. Krammer)). В 2006 году Дэн Маргалит (Dan Margalit) и Йон МакКэммонд (Jon McCammond) в своей статье [2] предложили новую геометрическую интерпретацию для группы крашеных кос, используя имеющееся представление Бирман–Ко–Ли. Геометрическая интерпретация предполагала использовать в качестве образующих скручивания (twist) и выпуклые скручивания Дена (convex Dehn twist). Цель этой работы -— развитие перечисленных результатов и их применение к группе крашеных кос типа B.

Группа кос B_n на n нитях изоморфна фундаментальной группе конфигурационного пространства $C(D^2, n)$, состоящего из неупорядоченных наборов n различных между собой точек в диске D^2: $B_n \cong \pi_1(C(D^2, n), P)$. Отмеченная точка $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ фундаментальной группы состоит из точек $P_1, \ldots, P_n$ диска D^2, которые мы будем называть проколами. Элементами группы кос являются классы эквивалентности движений проколов (путей в $C(D^2, n)$), при которых не меняется конфигурация проколов на диске D^2.

Определить выпуклые скручивания типа B можно, добавив к имеющемуся множеству проколов на диске ещё один “выделенный” прокол. Скручиванием типа B будет обычное скручивание проколов, включая “выделенный”. При этом он не может быть включён в какой-либо поддиск вместе с другими проколами. Аналогично определяются симметрические скручивания Дена.

Пусть D_A -— выпукло-проколотый диск. Тогда группа крашеных кос типа B порождена выпуклыми скручиваниями типа B или симметрическими выпуклыми скручиваниями Дена, и все её соотношения являются следствиями из соотношений для выпуклых скручиваний типа B. В частности, группа крашеных кос типа B изоморфна группе, определённой следующим конечным представлением.

В качестве образующих рассматриваются скручивания $T^B_{U,V}$ типа B, на которые накладываются указанные соотношения:

1) $T^B_{U,V} T^B_{W,Z} = T^B_{W,Z} T^B_{U,V}$, если UV и WZ не пересекаются,
2) $T^B_{U,V} T^B_{W,Z} = T^B_{W,Z} T^B_{U,V}$, если UV и WZ – вложенные пары,
3) $T^B_{U,VW} = T^B_{U,V} T^B_{U,W}$, если (U, V, W) – допустимое разбиение.

Аналогичные соотношения можно перечислить и для случая, когда в качестве образующих используют симметрические выпуклые скручивания Дена:

1) $S_u^B = 1$, если u охватывает одиночный прокол,

2) $S_u^B S_v^B = S_v^B S_u^B$, если u и v имеют непересекающихся представителей,

3) $S_c^B S_d^B S_e^B S_f^B = S_w^B S_y^B S_z^B$, если перечисленные изотопические классы расположены так же, как и в лантерном соотношении, указанном Деном.

Литература

[1] Sofia Lambropoulou, Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manyfolds, Mathematisches Institut, Gottingen Universitat, arXiv:math.GT/0008235v1

[2] Dan Margalit and Jon McCammond, Geometric presentations for the pure braid group, arXiv:math.GT/0603204

Регуляризация модели нестационарного течения газа на трансзвуковых скоростях

Богданов А. Н. (Россия)
НИИ механики МГУ
bogdanov@imec.msu.ru

При исследовании нестационарных трансзвуковых течений могут использоваться методы теории сингулярных возмущений. Проблема исследования заключается в том, что уравнение Линя–Рейсснера–Цяня – основное уравнение, описывающее нестационарное трансзвуковое течение, является вырожденным гиперболическим уравнением (уравнение не содержит второй производной по времени, но имеет смешанную производную по времени и одной из пространственных координат). Хотя в указанном уравнении удалось сохранить многие важные особенности трансзвуковых течений (в первую очередь нелинейность, а также пространственную неодномерность, уравнение описывает весь трансзвуковой диапазон скоростей -– и дозвуковую, и сверхзвуковую область течения), обнаружились и существенные недостатки этого уравнения. Оказалось, что оно дает бесконечные скорости распространения слабых нестационарных возмущений вниз по потоку, а волновые фронты возмущений от точечного источника во все моменты времени представляют собой незамкнутые кривые (параболы); уравнение не описывает высокочастотные нестационарные возмущения; задача Коши для этого уравнения не корректна и т.д.

Выход из создавшихся трудностей представляется в сохранении в уравнении нестационарного трансзвукового течения, при его выводе из полных уравнений для потенциала скорости течения, сингулярного члена со второй производной по времени.

Получаемое уравнение – невырожденное, что позволяет преодолеть недостатки описания нестационарного трансзвукового течения на основе традиционного трансзвукового разложения. Это уравнение удобно называть модифицированным уравнением Линя–Рейсснера–Цяня. Модифицированная модель позволяет уточнить полученные ранее решения задач нестационарной трансзвуковой аэродинамики, в том числе задач свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях.

Турбулентность в слабо-диссипативной версии теории КАМ

Богданов Р. И. (Россия)
НИИЯФ МГУ
bogdanov@bogdan.npi.msu.su
Богданов М. Р. (Россия)
МГУ ИЕ
bogdanov@bogdan.npi.msu.su

Сценариям перехода от ламинарного течения жидкости (или газа) к турбулентному в течение последнего столетия посвящено большое количество исследований как теоретических так и экспериментальных (см. [7], [8] и библ. там же). Со второй половины прошлого столетия использование ЭВМ привело к созданию вычислительной гидродинамики (см. [7]).

Теория бифуркаций, восходящая к работам А. Пуанкаре, А. П. Андронова и т.д., систематически развиваемая В. И. Арнольдом и его учениками вплоть до настоящего времени, традиционно считается ключевой идеей для понимания и создания соответствующих сценариев.

Бифуркация Богданова–Такенса, появившаяся в 1970-х годах, привела авторов [1] к следующей дискретной динамической системе на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\dot{x}\right)_{n+1}, \; \left(\dot{x}\right)_{n+1} = \left(\dot{x}\right)_n + h\left(\ddot{x}\right)_n, \tag{1}$$

где h – шаг дискретизации. После ренормализации (см. [1]) в фазовом пространстве динамическая система в дискретном времени (1) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\dot{x}\right)_{n+1}, y_{n+1} = y_n + kx_n\left(x_n - 1\right) + \left(\varepsilon + \mu x_n\right) y_n \tag{2}$$

где $k^2 = h$, а $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$ – параметры модели.

Система (2), будучи квадратичной с дробно-рациональным обратным отображением, выгодно продолжает примеры динамических систем Лоренца, Фейгенбаума, Эно-Хейлеса, Хейлеса [2].

При подходящих значениях параметров система (2) имеет богатую структуру асимптотически (не) устойчивых орбит наряду с гиперболическими [3]. Гиперболические периодические орбиты могут иметь гетероклиническую структуру. В соответствием с результатами символической динамики в этом случае их появляется счетное число. Они образуют область стохастической диффузии Арнольда, разделяющую асимптотически (не) устойчивые орбиты. Продвинуться в понимании взаимодействия асимптотически (не) устойчивых и гиперболических орбит, а также их численных характеристик помогают классические подходы математической физики и статистической механики [4]–[6].

Вдоль периодических орбит хорошо определены адиабатические инварианты отображения (2): временные средние функций на фазовом пространстве (например, таких как полная энергия, кинетическая и потенциальная ее составляющая и т.д.). Эти адиабатические инварианты с ростом периода обнаруживают тенденцию к “насыщению” (выходу на постоянное, не зависящее от периода значение), разбивая орбиты на кортежи. Внутри кортежа “насыщение” приходит к своему хорошо определенному предельному значению . Близкие к асимптотически (не) устойчивым орбитам гиперболические орбиты в пределах 10% наследуют значения адиабатических инвариантов вдоль асимптотически (не) устойчивых периодических орбит.

Отображение (2) помимо указанных выше адиабатических инвариантов имеет такой инвариант вдоль периодической орбиты как показатель сжатия (растяжения) фазовой площади. Внутри кортежей этот средний якобиан линейно растет с увеличением периода (угол наклона свой для каждого кортежа).

Оценки площадей бассейнов (отталкивания) притяжения асимптотически (не) устойчивых периодических орбит позволяют в соответствии с распределением Больцмана–Гиббса оценивать абсолютную температуру в этих состояниях. В адиабатическом приближении средняя работа сил диссипации и средний якобиан позволяют оценивать давление вдоль периодических орбит. Отношение сил давления к силам вязкости позволяет оценивать аналог числа Рейнольдса.

Оказывается, по мере возрастания периода (у нас в пределах $1 \div 10^5$) асимптотически устойчивых периодических орбит температура возрастает на $2 \div 3$ порядка, давление падает на 2–3 порядка, а числа Рейнольдса падают в пределах $4 \div 5$ порядков (аналогичная картина наблюдается и для асимптотически неустойчивых орбит).

Работа выполнена частично при поддержке фонда РФФИ грант № 04-01-00115.

Литература

[1] Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov-map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3, № 4, p. 803–842.

[2] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978, 304 с.

[3] Богданов Р. И. Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости // Функц. анализ и его приложения, т. 31, вып. 2, 1997, с. 67–70.

[4] Богданов Р. И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. – М.: Вузовская книга, 2003. 376 с.

[5] Богданов Р. И., Богданов М. Р. Переход от развитой турбулентности к квазиравновесному состоянию // Научный вестник МГТУГА, № 114, серия Математика и Физика. М.: МГТУ ГА, 2007, с. 4–10.

[6] Богданов Р. И., Гайдученко И. В., Расторгуев В. А., Тарасов Ю. И. Спектрометрия в слабо-диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Тр.семинара "Время, хаос и математические проблемы". – М.: Книжный дом "Университет", 1999, с. 203–224.

[7] Капица П. Л. Научные труды. Физика и техника низких температур. – М.: Наука, 1989, 460 с.

[8] Belotserkovsrii O. V. Turbulence and Instabilities – M.: MZpress, 2003, 460 p.

[9] Фриш У. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. Перевод с англ. А. Н. Соболевского под редакцией М. Л. Бланка. – М.: ФАЗИС, 1998, XIV-346 с.

Гиперболическое уравнение Монжа–Ампера: классические решения на всей плоскости

Братков Ю. Н. (Россия)
ЦНИИМаш
icm2006@rambler.ru

На плоскости $\mathcal{R}^2 = (x, y)$ рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения Монжа–Ампера

$$\begin{cases} A + Bz_{xx} + Cz_{xy} + Dz_{yy} + \operatorname{hess} z = 0\,, \\ z(0,y) = z^o(y), \quad z_x(0,y) = p^{\,o}(y), \quad y \in \mathcal{R}\,. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{hess} z = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$, коэффициенты A, B, C, D зависят от x, y, z, z_x, z_y. Уравнение гиперболично, если $C^2 - 4BD + 4A > 0$.

Формулируются достаточные условия существования C^3-решения на всей плоскости [1].

Используется сведение гиперболического уравнения Монжа–Ампера к системе пяти уравнений в римановых инвариантах (Д. В. Туницкий).

Теория гиперболических систем имеет чрезвычайно красивый вид, если собственные значения системы отделимы (например, разделены константами). В случае уравнения Монжа-Ампера собственные значения совпадают с решением системы, т.е. они неизвестны и их требуется найти.

Суть проблемы сформулировал в 1953 г. Ж. Лере: "Удается доказать только *локальную теорему существования...* Она показывает, что для гиперболических уравнений существование решений в целом зависит от получения *априорных оценок* для их производных".

Добавим, что если в заданной области решение имеет особенности, то их заменой переменных можно вывести за пределы области. К этому сводятся многие работы. Но если заданная область – вся плоскость, то выводить сингулярности некуда. Мы получаем качественно иную задачу.

Еще Б. Риман показал, что некая конкретная гиперболическая система регулярных решений на всей плоскости не имеет. Класс слабо нелинейных систем

$$(\partial_x + \xi_r(s)\partial_y)\, r = 0, \qquad (\partial_x + \xi_s(r)\partial_y)\, s = 0$$

(под слабой нелинейностью понимается $\partial\xi_\omega/\partial\omega = 0$, $\omega = r, s$) как систем, имеющих регулярные решения на всей плоскости, ввел в 1955 г. Н. Н. Яненко, положив тем самым начало новому виду спорта. Рассмотрение систем двух уравнений в инвариантах с ненулевой правой частью было проведено в 1967 г. Б. Л. Рождественским и А. Д. Сидоренко. Подходящим оказался класс (слабо нелинейных) систем, гиперболических в узком смысле, т.е. систем с отделимыми собственными значениями. Таким образом, теорема Рождественского–Сидоренко переводит проблему априорной оценки производных в проблему априорной оценки отделимости собственных значений, т.е. в проблему $\xi_r \neq \xi_s$.

Приведем пример. Гиперболическое уравнение Монжа–Ампера с коэффициентами, зависящими только от x, y, сводится к системе

$$(\partial_x + s\partial_y)\, r = (r - s)\, a_r(x, y, r), \qquad (\partial_x + r\partial_y)\, s = (r - s)\, a_s(x, y, s).$$

Вычтя из первого уравнения второе, разделив на $r - s$, сведя к логарифмической производной и проинтегрировав вдоль характеристики, получаем равенство

$$(r - s)(x, y) = (r^o - s^o) \exp\left\{ \int_0^x (a_r - a_s - s_y)\, d\tau \right\}.$$

Из него следует, что если $r^o(y) \neq s^o(y) \quad \forall\, y \in \mathcal{R}$, а r, s, s_y не уходят в бесконечность ни в какой конечной точке, то $r - s \neq 0$ в любой конечной точке. Попросту говоря, здесь мы имеем эквивалентность априорных оценок для производных и для r, s, $r - s$.

Подход автора: автор волевым образом задает априорную оценку для r, s, $r - s$. Мышление в этом направлении было блокировано.

Для приведенного примера имеем $r(x, y) = r^o + \int_0^x a_r\, d\tau$ и аналогично для $s(x, y)$. Достаточно, чтобы интегралы от функций a_r, a_s были малы, начальные функции r^o, s^o были ограничены, и их разность $r^o - s^o$ была велика.

Литература

[1] Братков Ю. Н. Гиперболическое уравнение Монжа–Ампера: классические решения на всей плоскости // Математический сборник, 2007 (в печати); http://mi.mathnet.ru/msb3838.

О пересечениях узловых множеств

Гичев В. М. (Россия)
Омский филиал ИМ СО РАН
`gichev@ofim.oscsbras.ru`

Пусть M – связное компактное ориентируемое риманово многообразие без края, Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на нем, $\lambda \neq 0$ – его собственное число, E_λ – соответствующее пространство вещественных собственных функций.

Теорема ([1]).

(1) *Если у M первые когомологии де Рама тривиальны, то для любых $u, v \in E_\lambda$ найдется точка $p \in M$ такая, что $u(p) = v(p) = 0$.*

(2) *Если M – однородное пространство компактной группы Ли изометрий, то верно и обратное: из $H^1(M) \neq 0$ следует существование $\lambda \neq 0$ и собственных функций $u, v \in E_\lambda$ без общих нулей.*

Доказательство (1) основано на следующем наблюдении: если общих нулей нет, то семейство узловых областей для u и v образует покрытие M. Сопоставим ему граф, вершины которого отвечают узловым областям, а ребра соединяют те из них, чье пересечение непусто. Он обладает свойствами: а) его вершины разбиваются на два подмножества, каждое из которых содержит ровно одну вершину любого ребра; б) в каждой вершине встречаются по крайней мере два ребра. Свойство б) выполняется потому, что А) если U, V – узловые области для u, v (соответственно) и $U \subseteq V$, то u скалярно кратно v; Б) вблизи своего узлового множества собственная функция меняет знак. Из этих свойств следует существование нетривиальных 1-циклов.

В случае единичной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ со стандартной метрикой собственные числа имеют вид $\lambda_n = -n(n+1)$, причем $\dim E_{\lambda_n} = 2n+1$; обозначим $\mathcal{H}_n = E_{\lambda_n}$. Для $u, v \in \mathcal{H}_n$ общего положения множество общих число точек узловых множеств N_u, N_v конечно. Более того, имеется простая оценка сверху, вытекающая из теоремы Безу: $\mathrm{card}(N_u \cap N_v) \leqslant 2n^2$. Она достигается. Доказанной нетривиальной оценки снизу нет, однако частичные результаты и компьютерные эксперименты подтверждают следующую гипотезу: $\mathrm{card}(N_u \cap N_v) \geqslant 2n$ (значение $2n$ достигается). Оценка числа общих нулей двух гармоник применима к числу критических точек одной гармоники, при условии конечности их количества; однако верхняя граница $2n^2$, видимо, не является точной (это так при $n = 1, 2$).

Следующее равенство есть весьма частный случай теоремы 3.2.48 из [2]: если $\gamma, \nu \subset \mathbb{S}^2$ имеют конечную длину, то

$$\int_{\mathrm{O}(3)} \mathrm{card}(g(\gamma) \cap \nu)\, dg = \frac{1}{2\pi^2} h^1(\gamma) h^1(\nu), \tag{1}$$

где dg – инвариантная мера на $\mathrm{O}(3)$ полной массы 1, h^1 обозначает одномерную меру Хаусдорфа на $\mathbb{S}^2$. Используя (1) и оценки числа общих точек, при подходящем выборе γ и ν можно оценить сверху и снизу длины узловых множеств N_u, где $u \in \mathcal{H}_n$, $u \neq 0$, а также внутренние радиусы узловых областей:

$$\frac{2\pi}{j_1}\left(n+\frac{1}{2}\right) < h^1(N_u) \leqslant 2\pi n,$$
$$\arcsin\frac{1}{n} \leqslant \operatorname{inrad}\left(\mathbb{S}^2 \setminus N_u\right) \leqslant \theta_n < \frac{j_1}{n+\frac{1}{2}}\,.$$

Здесь $j_1 \approx 2.4048$ – наименьший положительный корень функции Бесселя J_0, а $\cos\theta_n$ – наибольший корень полинома Лежандра P_n. Верхние границы $2\pi n$ и θ_n достигаются. Оценки для внутреннего радиуса даются во внутренней метрике $\mathbb{S}^2$. Нижняя граница для $h^1(N_u)$, видимо, может быть улучшена; однако она больше, чем граница $\frac{1}{11}\mathrm{Area}(M)\sqrt{\lambda}$, полученная в [3] для всех компактных римановых поверхностей M (для достаточно больших собственных чисел λ в общем случае и для любых λ при неотрицательной кривизне M).

Подобными методами можно также найти среднее значение числа общих нулей функций из $\mathcal{H}_n$ — оно равно $n(n+1)$.

Доказательства этих результатов имеются в препринте, доступном по адресу http://arxiv.org/abs/0705.2547.

Литература

[1] Gichev V.M.. A note on common zeroes of Laplace–Beltrami eigenfunctions // Ann. of Global Anal. and Geom. – 2004. – v. 26. – p. 201–208.

[2] Федерер Г. Геометрическая теория меры: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1987. – 760 с.

[3] Savo A. Lower bounds for the nodal length of eigenfunctions of the Laplacian // Ann. of Global Anal. and Geom. – 2001 – v. 19. – p. 133—151.

Подковы Смейла и их бифуркации в обобщенных отображениях Эно

Гонченко С. В. (Россия)
НИИ прикладной математики и кибернетики, Нижний Новгород
gosv100@uic.nnov.ru

Изучаются гиперболические свойства обобщенных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1-y) - bx + \alpha xy, \tag{1}$$

при $\gamma > 4$ и достаточно малых b и α. Отображения такого типа возникают в системах с гомоклиническими касаниями, [1], [2], и, в отличие от стандартного отображения Эно ($\alpha = 0$), они демонстрируют невырожденные бифуркации периодических точек с мультипликаторами $e^{\pm i\varphi}$. В докладе показывается, что и гиперболическая динамика отображения (1) существенно отличаются от той, которая наблюдается в отображении Эно. Хорошо известно, что последняя представлена либо ориентируемыми ($b > 0$), либо неориентируемыми ($b < 0$) подковами Смейла, причем переходы между этими подковами (через $b = 0$) – сингулярные. Ориентируемые и неориентируемые подковы также существуют в отображении (1), однако переходы между ними сопровождаются появлением т.н. полуориентируемых подков Смейла и бесконечных цепочек "мгновенных" бифуркаций, не выводящих из гиперболичности но меняющих определенные (гладкие) свойства подковы.

Литература

[1] Гонченко С. В., Гонченко В. С. "О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями". Труды МИАН, 2004, т. 244, 84–114.

[2] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. "О динамических свойствах диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями". Современная математика и ее приложения, 2003, т. 7, 92–118.

Крутильные колебания тела в жидкости под действием модулированной упругой силы

Гуда С. А. (Россия)
Южный федеральный университет
gudasergey@mail.ru

Исследуется совместная задача о крутильных колебаниях твердого тела вращения внутри сосуда произвольной формы, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. При таком движении область течения жидкости не меняется со временем. На тело действует момент упругой силы с периодической по времени жесткостью: $M_{\text{elastic}} = -k(1+h(\omega t))\varphi$. Здесь φ – угол отклонения тела от положения равновесия, k – коэффициент жесткости, $h(\tau)$ – 2π-периодическая относительная модуляция жесткости с нулевым средним, ω – круговая частота модуляции. Ранее автором совместно с В. И. Юдовичем [1] была доказана глобальная асимптотическая устойчивость состояния покоя в задаче с постоянной жесткостью упругой силы. Модуляция жесткости может привести к параметрическому возбуждению неустойчивости.

В работе проводится качественное исследование линеаризованной на состоянии покоя задачи в случае произвольных форм сосуда и тела и произвольных значений вязкости. Изучается спектр Флоке. Спектральная задача для мультипликаторов Флоке ρ сводится к отысканию нулей определителя Хилла $D(\rho)$. Определитель $D(\rho)$ записывается не для исходной системы, описывающей совместное движение жидкости и тела, а для интегродифференциального уравнения, которое получается в результате исключения из исходной системы скорости течения жидкости. Функция $D(\rho)$ разлагается на простейшие дроби

$$D(\rho) = c_{-1}\rho + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{r_n^{-1} - \rho^{-1}} - r_n \right),$$

где $c_{-1} > 0$, $r_n = e^{-T\lambda_n}$, $T = 2\pi/\omega$, $\lambda_n > 0$ – собственные значения оператора Стокса. При некоторых условиях, например для гармонической модуляции $h(\tau) = b_1 \cos\tau + b_2 \sin\tau$, все коэффициенты c_n неотрицательны. Это позволяет исследовать структуру спектра Флоке. Доказано, что он состоит из счетной последовательности мультипликаторов $\rho_n \in (r_n; r_{n-1})$, $n = 2, 3, \ldots$ и еще двух чисел: ρ_0 и ρ_1, которые могут быть комплексно сопряженной парой, могут вместе лежать на отрицательном луче действительной оси или на одном из интервалов $(r_1; +\infty)$, $(r_2; r_1)$, $(r_3; r_2)$, ... Таким образом, неустойчивость может возникнуть тогда и только тогда, когда хотя бы один из мультипликаторов ρ_0 или ρ_1 окажется вне единичного круга. Это позволяет установить некоторые топологические свойства нейтральных кривых (кривых в пространстве параметров $(\omega, \|h\|_{L_2})$, для которых спектр Флоке содержит мультипликатор на единичной окружности). Что существенно сокращает трудоемкие вычисления – не приходится искать нейтральные кривые в тех областях пространства, где их заведомо быть не может. В трудных для расчетов областях (ω мало или $\|h\|_{L_2}$ велика) знание закономерностей расположения нейтральных кривых позволяет быстро браковать графики, полученные с неудовлетворительной точностью вычислений.

Построены асимптотики показателей Флоке для трех случаев: малой амплитуды модуляции $\|h\|_{L_2}$, большой частоты ω и для большой высокочастотной модуляции порядка $\|h\|_{L_2} \sim C\omega^2$, $\omega \to \infty$. В первых двух случаях спектр Флоке устойчив. Третья асимптотика позволяет доказать существование значений параметров, при которых происходит возбуждение неустойчивости. Также с ее помощью удается установить существование нейтральных кривых всех трех типов: синхронного, субгармонического и комбинационного.

Доказана полнота решений Флоке. Спектральную задачу для решений Флоке $\mathrm{w}(t) = e^{-\sigma t}\widetilde{\mathrm{w}}(t)$ (где $\widetilde{\mathrm{w}}$ – периодическая функция) уравнения $\dot{\mathrm{w}} = A_0\mathrm{w} + B(t)\mathrm{w}$ можно трактовать как задачу на собственные значения для оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} + A_0 + B(t)$, действующего в пространстве периодических вектор-функций. Получена оценка резольвенты оператора L на лучах $\operatorname{Re}\sigma > 0$, $\operatorname{Im}\sigma = \omega/2 + \omega k$, $k \in \mathbb{Z}$: $\|(\sigma I - L)^{-1}\| \leqslant C$. Это позволило провести рассуждения подобные теореме Келдыша и доказать полноту корневых векторов оператора L.

Литература

[1] Гуда С. А., Юдович В. И. Совместная задача о вращении твердого тела в вязкой жидкости под действием упругой силы // Сиб. мат. ж. – 2007. – т. 48, № 3, с. 556–576.

Асимптотические разложения решений и специальные полиномы иерархии второго уравнения Пенлеве

Демина М. В. (Россия)
Московский инженерно-физический институт (ГУ)
mvdemina@mephi.ru
Кудряшов Н. А. (Россия)
Московский инженерно-физический институт (ГУ)
kudryashov@mephi.ru

В докладе рассматривается иерархия второго уравнения Пенлеве и связанные с нею специальные полиномы. Иерархия второго уравнения Пенлеве – это последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$P_2^{(N)} \,:\, (d_z + 2\,w)\, L_N[w_z - w^2] - z\,w - \alpha = 0, \quad N \geqslant 1, \tag{1}$$

заданная с помощью оператора Ленарда

$$d_z L_{N+1}[u] = (d_z^3 + 4ud_z + 2u_z)L_N[u], \quad L_0[u] = \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

В уравнениях (1) α – комплексный параметр. Первым представителем иерархии является второе уравнение Пенлеве [1]

$$P_2 \equiv P_2^{(1)} \,:\, w_{zz} - 2\,w^3 - z\,w - \alpha = 0. \tag{3}$$

Эта иерархия возникает из иерархии модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза переходом к автомодельным переменным. Уравнения иерархии обладают целым рядом интересных свойств. В частности, каждое из уравнений имеет пару Лакса. Это означает, что задача Коши для уравнений (1) решается методом изомонодромной деформации. По-видимому, уравнения иерархии определяют новые трансцендентные функции. Это строго доказано для второго уравнения Пенлеве. Большую роль играет асимптотический анализ их решений. Найдены асимптотические разложения решений любого представителя иерархии в окрестности нуля, бесконечности и точки $z = z_0 \neq 0$.

Показано, что при $\alpha = n$ – целом некоторые из полученных разложений могут быть просуммированы. Результатом являются рациональные решения. Найдена связь полюсов рациональных решений и коэффициентов одного из разложений в окрестности бесконечности. Рациональные решения $w^{(N)}(z;n)$ уравнения $P_2^{(N)}$ допускают представление через полиномы $\{Q_n^{(N)}(z)\}$, называемые полиномами Яблонского – Воробьева (Я-В) [2], [3]:

$$w^{(N)}(z;n) = \frac{d}{dz}\left\{\ln\left[\frac{Q_{n-1}^{(N)}(z)}{Q_n^{(N)}(z)}\right]\right\}, \tag{4}$$
$$w^{(N)}(z;-n) = -w^{(N)}(z;n), \quad n \geqslant 1.$$

Каждому N соответствует своя последовательность полиномов. Полиномы Я-В рассматриваются как аналоги классических ортогональных многочленов. Они выражаются через полиномы Шура. Кроме того, рассматриваемые полиномы непосредственно связаны с так называемыми τ-функциями P_2 иерархии. Получены рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют полиномы Я-В. Некоторые из соотношений справедливы для любой последовательности полиномов. Они выглядят следующим образом:

$$D_z Q_{n+1}^{(N)} \cdot Q_{n-1}^{(N)} = (2n+1)(Q_n^{(N)})^2, \quad n \geqslant 1; \tag{5}$$
$$D_z^2 Q_{n+1}^{(N)} \cdot Q_n^{(N)} = 0, \quad n \geqslant 0,$$

где D_z – оператор Хироты. Наряду с этим выведено еще одно дифференциально-разностное соотношение, позволяющее последовательно строить полиномы

$$Q_{n+1}^{(N)}\, Q_{n-1}^{(N)} = z\,(Q_n^{(N)})^2 - 2\,(Q_n^{(N)})^2\, L_N\left[2\,\frac{d^2}{dz^2}\big(\ln Q_n^{(N)}\big)\right], \quad n \geqslant 1. \tag{6}$$

Получена иерархия ОДУ, которым удовлетворяют полиномы. Она имеет вид

$$\frac{1}{2}Q^2 L_{N+1}\left[2\frac{d^2}{dz^2}\ln Q\right] - z\,Q_{zz}Q + z\,Q_z^2 - Q_z\,Q = 0, \quad Q \stackrel{def}{=} Q_n^{(N)}(z). \tag{7}$$

С помощью замены $h = 2\frac{d}{dz}\ln Q$ из иерархии (7) может быть построена еще одна иерархия, также имеющая решения, выражаемые через полиномы $\{Q_n^{(N)}(z)\}$:

$$L_{N+1}[h_z] - zh_z - h = 0. \tag{8}$$

Найдены первые интегралы уравнений (8), определены постоянные интегрирования, при которых первые интегралы имеют решения в терминах полиномов Я-В.

Литература

[1] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 1. – 149 с.

[2] Clarkson P. A., Mansfield E. L. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. Nonlinearity, 2003, v. 16, pp. R1–R26.

[3] Demina M. V., Kudryashov N. A. The Yablonskii–Vorob'ev polynomials for the second Painlevé hierarchy. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, v. 32(2), pp. 526–537.

Об одном классе интегральных уравнений типа Вольтерры второго рода и их приложениях к нелокальным задачам

Дженалиев М. Т. (Казахстан)
Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы
dzhenali@math.kz
Амангалиева М. М. (Казахстан)
Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы

В докладе рассматриваются интегральные уравнения типа Вольтерры второго рода, имеющие особенность. Так как интегральный оператор имеет особенность, то при определенных значениях спектрального параметра метод последовательных приближений не применим.

В работе показано, что в этих случаях задача оказывается нетеровой и имеет положительный индекс. Установлено, что исследуемые в работе интегральные уравнения возникают естественным образом при изучении некоторых нелокальных граничных задач, обратных задач математической физики, граничных задач для нагруженных дифференциальных уравнений и т.д.

На вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ рассматриваются вопросы разрешимости следующего интегрального уравнения

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = f(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

и его сопряженного

$$\mathbf{K}_\lambda^* \nu \equiv (I - \overline{\lambda}\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = g(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где ядро $k(z)$ определено соотношением

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \leqslant z < +\infty; \end{cases} \quad (3)$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ -- спектральный параметр,}$$

$$e^{-t} f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad e^t g(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \quad (4)$$

Решения уравнений (1) и (2) соответственно ищутся в классах:

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad e^t \nu(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \quad (5)$$

Заметим, что в уравнениях (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает свойством: норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\mathrm{erfc}(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{1/2}^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi$. Это свойство определяет особенность рассматриваемого интегрального уравнения (1). Отметим, что необходимость исследования особых интегральных уравнений вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2], [3], задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д.

Вначале исследуем соответствующее (1) однородное уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Применяя к нему преобразование Меллина, с учетом теоремы о свертке, получим

$$\widehat{\mu}(s)\cdot[1 - \lambda\widehat{k}(s)] = 0, \quad s = s_1 + is_2,$$

где $\widehat{\mu}(s)$ – изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) z^{-s-1}\, dx, \quad \operatorname{Re} s < 0.$$

Сформулируем установленный результат для спектральной задачи (6).

Теорема 1. *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}$ *из* (6) *множество* $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C},\ Re\,\lambda \geqslant 0\}$ *является множеством характеристических чисел, а* $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{K})$ *– резольвентным множеством.*

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального уравнения для уравнения (2):

$$\nu(t) - \overline{\lambda} \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Если в уравнении (7) произвести замены: $t = t_1^{-1}$, $\tau = \tau_1^{-1}$ и ввести следующее обозначение $\nu_1(t_1) = t^{-1}\nu(t_1^{-1})$, то (7) преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1) - \overline{\lambda} \int_0^\infty k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)\nu_1(\tau_1)\frac{d\tau_1}{\tau_1} = 0,$$

т.е. оно совпадает с интегральным уравнением (6), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Здесь справедлива следующая

Теорема 2. *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}^*$ *из* (7) *вся комплексная плоскость не содержит собственных значений.*

Полученные результаты применяются к нелокальным граничным задачам для параболического уравнения.

Литература

[1] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е. Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт № 6. Алматы, 2006. 40 с.

[2] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.

[3] Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.

Квадратичные условия оптимальности особых режимов и их применение к жестким траекториям и анормальным субримановым геодезическим

Дмитрук А. В. (Россия)
ЦЭМИ РАН, МГУ
avdmi@cemi.rssi.ru

Будет рассказано о результатах работ А. А. Милютина и автора по применению полученных ими ранее условий оптимальности особых режимов к анализу жестких траекторий и анормальных геодезических в субримановых (и субфинслеровых) метриках. Эти результаты в некоторых отношениях более сильные, чем у других авторов.

n-мерные модулярные формы Гильберта

Ермаков В. В. (Россия)
Московский автомобильно-дорожный институт
vikvve@rambler.ru

Модулярные формы Гильберта являются существенно двумерным объектом. Предпринята попытка обобщить их на n-мерный случай.

Пусть ε – вещественное целое алгебраическое число степени n; $k = Q(\varepsilon)$. Положим $\varepsilon_j = \varepsilon^{j-1}$ для $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим решетку $O = Z(\varepsilon)$, состоящую из чисел $a = \sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_j$, $a_j \in Z$. Определим отображения $S_i \colon O \to O$, действующие по формулам: $S_1 = \mathrm{id}$; $S_i(\sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_j) = \sum_{j \neq i} a_j \varepsilon_j - a_i \varepsilon_i$ при $i > 1$.

$PSL_2(O) = SL_2(O)/\{\pm 1\}$ – модулярная группа; $H = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость; H^n – прямое произведение n экземпляров H. Зададим действие модулярной группы $PSL_2(O)$ на H^n следующим образом. Элемент $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(O)$ переводит $z = (z_1, \ldots, z_n) \in H^n$ в $g(z) = (g(z_1), \ldots, g(z_n))$, где $g(z_j) = (S_j(a) z_j + S_j(b))/(S_j(c) z_j + S_j(d))$.

Определение. *n-мерной модулярной формой Гильберта веса* $(2k_1, \ldots, 2k_n)$ называется мероморфная в H^n функция, для любого $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(O)$ удовлетворяющая соотношению

$$f(g(z_1), \ldots, g(z_n)) = f(z_1, \ldots, z_n) \prod_{j=1}^{n} (S_j(c) z_j + S_j(d))^{2k_j}.$$

Аналогичное определение можно дать для конгруэнц-подгрупп $\Gamma \subset PSL_2(O)$.

Изучаются разложения n-мерных модулярных форм в ряды Фурье.

Тип комплексного сопряжения вещественной трехчленной кривой

Звонилов В. И. (Россия)
Сыктывкарский государственный университет
zvonilov@syktsu.ru

Изучаются алгебраические кривые на поверхности Хирцебруха, задаваемые уравнениями вида

$$y^n + b(x)y + w(x) = 0. \tag{1}$$

и называемые *трехчленными кривыми*. При $n = 3$ такие кривые называются *тригональными*. Пусть e – наименьшее натуральное число, для которого в уравнении (1) выполняются неравенства $\deg b \leqslant e(n-1)$, $\deg w \leqslant en$ с $n > 1$. Тогда многоугольник Ньютона левой части этого уравнения содержится в треугольнике с вершинами $(0,0), (ne, 0), (0, n)$. Торическая поверхность, построенная по этому треугольнику, – это рациональная линейчатая поверхность (поверхность Хирцебруха Σ_e), а x, y – аффинные координаты в карте, полученной удалением из Σ_e исключительной кривой и одной из прямолинейных образующих поверхности.

Трехчленная кривая называется *вещественной*, если многочлены $b(x)$ и $w(x)$ в уравнении (1) вещественны. *Жесткой изотопией* называется путь в пространстве неособых вещественных трехчленных кривых с фиксированными n и e. Жесткие изотопии вещественных трехчленных кривых на поверхностях Хирцебруха изучались в работе [1], а при $n = 3$ на любых линейчатых поверхностях – в работе [2].

Пусть $\mathbf{R}A$ (соответственно, $\mathbf{C}A$) – множество вещественных (соответственно, комплексных) точек неособой вещественной алгебраической кривой A. Кривая A принадлежит *типу* I или *типу* II в зависимости от того, несвязно $\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A$ или связно.

В работе найдены критерии принадлежности неособой вещественной тригональной кривой типу I. В частности, при $n = 3$ получена жесткая изотопическая классификация вещественных тригональных кривых типа I.

Литература

[1] Звонилов В. И. Жесткие изотопии трехчленных кривых с максимальным числом овалов // Вестник Сыктывкарского ун-та. – 2006. – сер. 1, вып. 6. – С. 45–66.

[2] Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. On deformation types of real elliptic surfaces. // Preprint arXiv:math.AG/0610063. – 2006. – P. 1–59.

Оценки скорости сходимости для некоторых линейных систем

Зейфман А. И. (Россия)
Вологодский государственный педагогический университет
zai@uni-vologda.ac.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая вероятности состояний неоднородной марковской цепи с поглощением в нуле. Исследуются двусторонние оценки скорости сходимости к вырожденному предельному режиму.

Асимптотики решений некоторых сингулярных задач

Зернов А. Е. (Украина)
Южноукраинский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, г. Одесса
zernov@ukr.net

В первой части доклада рассматриваются задачи Коши

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$ – неизвестная функция, $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, $D \subset (0,\tau) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Во второй части доклада рассматриваются задачи Коши

$$\alpha(t)x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0, \tag{2}$$

где $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$ – неизвестная функция, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $g\colon (0,\tau) \to (0,\infty)$ и $h\colon (0,\tau) \to (0,\infty)$ – непрерывные функции, $g(t) \leqslant t$ и $h(t) \leqslant t$ при $t \in (0,\tau)$. Предполагается, что либо $\alpha(t)$ – единичная матрица n-го порядка, либо

$$\alpha(t) = \operatorname{diag}(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t), 1, \ldots, 1), \quad 1 \leqslant m < n,$$
$$\alpha(t) = \operatorname{diag}(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)),$$

и все элементы $\alpha_i\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ матрицы $\alpha(t)$ – непрерывные функции, стремящиеся к нулю при $t \to +0$.

Решением каждой из задач (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x\colon (0,\rho) \to \mathbb{R}^n$ (где $0 < \rho < \tau$), которая удовлетворяет соответствующему уравнению при всех $t \in (0,\rho)$ и при этом $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Задача (1) отдельно исследуется в случаях $n = 1$ и $n \geqslant 2$. Изучаются линейные, возмущенные линейные, нелинейные и возмущенные нелинейные задачи (2).

Строятся асимптотики решений задач (1), (2). Доказывается существование у каждой из рассматриваемых задач непустых множеств решений с требуемыми асимптотическими свойствами при $t \to +0$. При известных условиях определяется число таких решений.

Разрешимость некоторых задач вариационной ассимиляции данных

Ипатова В. М. (Россия)
Московский физико-технический институт
ipatval@mail.ru

Пусть Ω – открытое подмногообразие сферы радиуса R с кусочно-гладкой границей, x, y, r – сферические координаты, $H(x,y)$ – положительная непрерывно дифференцируемая функция, $z = R - r$, $G = \{(x,y) \in \Omega,\ 0 < z < H(x,y)\}$, $0 < t_1 < \infty$, $D = \Omega \times (0, t_1)$; $(u,v,w) \equiv (\mathbf{u}, w)$ – вектор скорости, $w = w(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \int_z^{H(x,y)} \mathbf{u}\, dz'$, $\xi = \xi(x,y,t)$ – возвышение уровня поверхности океана. Далее символ ϕ используется как общее обозначение функций u, v, w, T, S.

Рассмотрим систему уравнений динамики океана [1]–[2]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B(u))\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla P = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g - \chi \rho_0 A_w w, \quad \chi = 0 \ \text{ или } \ \chi = 1, \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \tag{3}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla + w(\mathbf{u})\partial/\partial z$, $B(u)\mathbf{u} = (2\omega \sin y + u \operatorname{tg} y/R)(-v, u)$, $A_\phi = -\mu_\phi \triangle - \nu_\phi \partial^2/\partial z^2$, $A_u = A_v = A$, плотность воды $\rho = \rho(T,S)$ считается непрерывной по Липшицу функцией (при $\chi = 0$ и $\chi = 1$), либо многочленом второй степени (при $\chi = 1$).

На верхней границе при $z = 0$ ставятся условия

$$P = P_{atm} + g\rho_0 \xi, \quad w = -\partial \xi/\partial t + Q_w, \tag{4}$$

$$\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{\tau}{\rho_0} + \frac{w(\mathbf{u})}{2}\mathbf{u}, \quad \chi \nu_w \frac{\partial w(\mathbf{u})}{\partial z} = \chi \gamma_w w(\mathbf{u}), \tag{5}$$

$$\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_T T + \frac{w(\mathbf{u})}{2} T + Q_T, \quad \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = \gamma_S S + \frac{w(\mathbf{u})}{2} S + Q_S, \tag{6}$$

где P_{atm}, Q_w, Q_T, Q_S, τ – заданное функции.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$ скалярное произведение и норму в $L_2(G)$ и $L_2(\Omega)$;

$$[\phi, \phi_1] = \mu_\phi(\nabla \phi, \nabla \phi_1) + \nu_\phi(\partial \phi/\partial z, \partial \phi_1/\partial z) + \gamma_\phi(\phi, \phi_1)_0 \,|_{z=0},$$

где $\gamma_u = \gamma_v = 0$, $[\phi]^2 = [\phi, \phi]$, $[\mathbf{u}]^2 = [u]^2 + [v]^2 + [w(\mathbf{u})]^2$, $\|\Xi\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + g\|\xi\|_0^2$.

В работе доказываеся существование слабых решений системы (1)–(3), удовлетворяющих неравенствам

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|T\|^2 + \|S\|^2) + [T]^2 + [S]^2 \\
&\qquad \leqslant (T, f_T) - \gamma_T (Q_T, T)_0|_{z=0} + (S, f_S) - \gamma_S (Q_S, S)_0|_{z=0}, \qquad (7) \\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Xi\|^2 + [\mathbf{u}]^2 \\
&\qquad \leqslant (\mathbf{u}, \mathbf{f} - 1/\rho_0 \nabla P_{atm}) - (\tau, \mathbf{u}/\rho_0)_0|_{z=0} + g(\rho(T, S), w(\mathbf{u})). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Пусть в области $D_1 \subset D$ известны данные наблюдений за возвышением уровня поверхности океана $\xi = \xi_{obs}(x, y, t)$ и за поверхностной температурой $T|_{z=0} = T_{obs}(x, y, t)$, а в области $G_1 \subset (G \times (0, t_1))$ известны данные наблюдений за скоростью, температурой и соленостью воды, которые задаются функциями $\mathbf{u}^{obs}(x, y, z, t)$, $w^{obs}(x, y, z, t)$, $T^{obs}(x, y, z, t)$, $S^{obs}(x, y, z, t)$. Данные наблюдений используются для отыскания функций Q_w, τ, Q_T и Q_S, входящих в граничные условия (4)–(6), либо для отыскания начальных значений функций $\mathbf{u}$, ξ, T, S в момент $t = 0$. Расхождение между решением (1)–(3) и наблюдаемыми величинами характеризуется регуляризованным функциналом стоимости. На основании вытекающих из (7)–(8) априорных оценок доказывается разрешимость поставленных оптимизационных задач.

Работа выполнена в рамках проекта “Методы и технология решения задач вариационного усвоения данных наблюдений и управления сложными системами” по теме 3 фундаментальных исследований ОМН РАН и при частичной поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

Литература

[1] Lions J. L., Temam R., Wang S. On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. – 1992. – N 5. – P. 1007–1053.

[2] Агошков В. И., Ипатова В. М. Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН. – 2007. – Т. 412, N 2. – С. 151–153.

Равномерные оценки кратных осциллирующих интегралов

Карпушкин В. Н. (Россия)
ИППИ РАН
vladkarp@rol.ru

Пусть N – множество неотрицательных целых чисел, $k \in N$, $Q(k)$ – линейное пространство полиномов P таких, что $P(0) = 0$, где полином P степени $\leqslant k$ по переменной x_j для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, $n \geqslant 2$.

Пусть $Q(k, \varepsilon)$ – окрестность $0 \in Q(k)$ в какой-либо фиксированной норме в $Q(k)$. Положим $D(k,l) = \{(k_1, \dots, k_n) : k_j \leqslant k,\ k_j \in N$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и среди $k_1, \dots, k_n$ встречается число k не более, чем $l-1$ раз$\}$; $(2 \leqslant l \leqslant n)$. Это целочисленный куб с ребром длины k и со срезанными далекими от начала координат гранями, у которых коразмерность $\leqslant l$; $2 \leqslant l \leqslant n$. Пусть P – полином, $P = \sum_m a_m x^m$. Обозначим через $\operatorname{supp} P$ множество $\{m : a_m \neq 0\}$.

Пусть $C_0^\nu(A)$ – пространство непрерывно дифференцируемых ν раз функций, равных нулю вне ограниченного открытого множества A; $(\varphi)_\nu$ – норма в $C_0^\nu(A)$

$$(\varphi)_\nu = \max_{|s| \leqslant \nu} \sup_{x \in A} \left| \partial^{|s|} \varphi / \partial x^s \right|.$$

Обозначим через $I(F, \varphi, \tau)$ осциллирующий интеграл с фазой F и амплитудой φ, т.е. интеграл по R^n от $\varphi \exp(\sqrt{-1}\tau F)$. Пусть $V(F, A, c, \delta)$ – объем с фазой F, т.е. интеграл от 1 по $\{x \in A : c - \delta \leqslant F(x) \leqslant c + \delta\}$.

Теорема 1. *Пусть* $P \in Q(k) \setminus 0$, $\operatorname{supp} P \in D(k,l)$. *Для каждых* $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $2 \leqslant l \leqslant n$ *существуют константы* $L > 0$, $\varepsilon > 0$ *и окрестность* A *точки* $0 \in R^n$ *такие, что*

$$|I(P + G, \varphi, \tau)| \leqslant L \tau^{-1/k} (\ln \tau)^{l-2} (\varphi)_1;$$
$$|V(P + G, A, c, \delta)| \leqslant L \delta^{1/k} |\ln \delta|^{l-2}$$

для всех $\tau \geqslant 2$; $\varphi \in C_0^1(A)$; $c \in R$; $0 < \delta < 1/2$; $G \in Q(k, \varepsilon)$; $\operatorname{supp} G \in D(k,l)$.

Теорема 2. 1. *Пусть* $P \in Q(k) \setminus 0$. *Для каждых* $n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ *существуют константы* $L > 0$, $\varepsilon > 0$ *и окрестность* A *точки* $0 \in R^n$ *такие, что*

$$|I(P+G,\varphi,\tau)| \leqslant L\tau^{-1/k}(\ln\tau)^{n-1}(\varphi)_1;$$
$$|V(P+G,A,c,\delta)| \leqslant L\delta^{1/k}|\ln\delta|^{n-1}$$

для всех $\tau \geqslant 2$; $\varphi \in C_0^1(A)$; $c \in R$; $0 < \delta < 1/2$; $G \in Q(k,\varepsilon)$.

2. *Предположим, что* $k = 1$. *Для каждого* $n \geqslant 2$ *существуют константы* $L > 0$, $\varepsilon > 0$ *и окрестность* A *точки* $0 \in R^n$ *такие, что* $|I(P+G,\varphi,\tau)| \leqslant L\tau^{-1}(\ln\tau)^{n-2}(\varphi)_2$ *для всех* $\tau \geqslant 2$, $\varphi \in C_0^2(A)$, $G \in Q(1,\varepsilon)$.

Замечание 1. Утверждение 1 теоремы 2 в случае осциллирующего интеграла с амплитудой – характеристической функцией куба и правой частью $L\tau^{-1/k}(\ln\tau)^{n-1}$ следует из теоремы В. Н. Чубарикова (с явными константами L и ε – теорема 5 на стр. 39 (см. [1])).

Доказательство теорем 1, 2 проводится методами, развитыми в работах [2], [3].

Замечание 2. Полученные равномерные оценки осциллирующего интеграла и объема являются точными для случая, когда невозмущенная фаза есть моном. Теорема 1 точна для фаз $x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ осциллирующих интегралов и объемов, где $\max_i k_i = k \geqslant 2$, $1 \leqslant \min_i k_i < k$. Утверждение 1 теоремы 2 точно для фаз $x_1^k \ldots x_n^k$ осциллирующих интегралов при $k \geqslant 2$ и объемов при $k \geqslant 1$. Утверждение 2 теоремы 2 дает точную оценку для фаз $x_1 \ldots x_n$ осциллирующих интегралов.

Литература

[1] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.

[2] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой // Труды семинара им. И. Г. Петровского, выпуск 9, Изд. МГУ, 1983, с. 3–39.

[3] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки объемов // Труды МИАН, т. 221, М.: Наука, 1998, с. 225–231.

Динамические системы и инварианты Васильева второго порядка

Кирин Н. А. (Россия)
КГПИ
Kirin_N_A@mail.ru

Описание движения вихрей Декарта на плоскости является сложной задачей, которая до конца не решена. Классический подход к изучению динамики вихрей приводит к рассмотрению гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} æ_i æ_j \log r_{ij}.$$

Как было показано в [3], такой гамильтониан представляет мнимую часть инварианта Васильева первого порядка, заданного 1-итерированным интегралом Чена от логарифмических дифференциальных форм $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, с коэффициентами X_{ij}. Эти коэффициенты представляют собой формальные переменные, удовлетворяющие условиям $[X_{ij}; X_{jk} + X_{ik}] = 0$, где $i \neq j \neq k \neq i$. Здесь, по определению, коммутатор $[A; B] = AB - BA$.

Обобщая классический подход, можно в качестве гамильтониана выбрать мнимую часть инвариантов Васильева более высокого порядка. Выбрав подходящую весовую систему W для коэффициентов итерированных интегралов, можно задать движение вихрей на плоскости.

Как известно, косы из n нитей представляют пространственно-временную диаграмму движения n вихрей на плоскости. В свою очередь, инварианты Васильева позволяют различать неизотопные косы, а, следовательно, могут различать принципиально различные типы движения вихрей.

В данной статье обсуждаются свойства базисных динамических систем с гамильтонианом, представленным инвариантов Васильева второго порядка.

Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00085.

Литература

[1] Berger M. A. Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001), 1363–1374.

[2] Борисов А. М., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 368 с.

[3] Кирин Н. А. Гамильтоновы системы, отвечающие инвариантам Васильева первого порядка. Сборник научных статей аспирантов и соискателей “Начало”. – Вып. 5. – Коломна: КГПИ, 2006. – 216 с.

[4] Козлов В. В. Общая теория вихрей. – Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1998 (24–34).

Классификация случаев локальной управляемости для семейств двумерных бидинамических систем

Комаров М.А. (Россия)
Владимирский Государственный Университет
kami9@yandex.ru

На гладком многообразии *полидинамическая система* задаётся конечным набором гладких полей скоростей при естественном предположении, что число скоростей в наборе не менее двух. Управление такой системой представляет собой выбор в последовательные моменты времени одного из полей набора для дальнейшего движения.

Полидинамическая система называется *локально управляемой* в точке P многообразия, если для любой окрестности U точки P и некоторого $T > 0$ найдётся такая окрестность $V \subset U$ этой точки, что $\forall\, p \in V$ можно построить кусочно гладкую замкнутую кривую (цикл), целиком лежащую в U и проходящую через точки P и p, участки гладкости которой – отрезки фазовых кривых полей системы, соответствующие некоторому управлению, причём время движения по циклу меньше T.

На плоскости случаи локальной управляемости изучены А. А. Давыдовым [2] для типичных полидинамических систем и Л. Азеведо [1] для типичных однопараметрических семейств бидинамических систем. Всюду здесь под *типичным* семейством мы понимаем семейство из некоторого открытого всюду плотного множества в пространстве семейств, снабжённом тонкой гладкой топологией.

Доклад посвящён классификации типичных случаев локальной управляемости для двупараметрических семейств бидинамических систем на гладком двумерном многообразии. Под *типичными* объектом мы понимаем объект из открытого всюду плотного множества в пространстве объектов, снабжённом тонкой гладкой топологией.

Нетрудно заметить, что если бидинамическая система обладает локальной управляемостью в точке, то эта точка не является особой для одного из её полей (см. [1]), поэтому вблизи такой точки это поле можно гладко выпрямить, сделав его, например, единичным вдоль второй координаты, а саму точку в выпрямляющих координатах взять за начало координат. Тем самым, вопрос о случаях управляемости в нашем семействе будет сведён к вопросу об управляемости в нуле семейства систем вида

$$\{v = (0,1);\ w = (w_1, w_2)\}. \tag{1}$$

на плоскости.

Далее, известно, что если в изучаемой точке оба поля ненулевые, и фазовые кривые одного касаются фазовых кривых другого с конечным порядком, то локальная управляемость в этой точке есть тогда, и только тогда, когда в этой точке поля противоположно направлены, а порядок касания их фазовых кривых нечётный (см., например, [1]). Заметим, что для типичного двупараметрического семейства бидинамических систем этот порядок не превосходит 4.

Итак, остаётся изучить случаи локальной управляемости вблизи нуля для систем из типичного семейства (1) в ситуации, когда нуль – особая точка второго поля. Мы будем рассматривать семейство систем с точностью до гладкой орбитальной эквивалентности, заключающейся в том, что разрешено

(а) делать гладкие замены координат, гладко зависящие от параметра,

(б) делать диффеоморфизмы оси параметра семейства, и

(в) умножать поля на гладкие ненулевые (возможно, разные) функции одного знака.

Очевидно, что преобразования (а)–(в) сохраняют локальную управляемость в точке, т.е. ее наличие либо отсутствие.

Обозначим через w_* матрицу линеаризации поля w в нуле, а через D – дискриминант её характеристического многочлена.

Теорема. *Для системы из типичного двупараметрического семейства* (1) *справедливо одно из двух*:

1\. *либо система обладает локальной управляемостью в точке* P (= *нуле*), $w(P) = 0$, *и тогда она входит только в один из следующих двух классов*:

(F) *линеаризации поля* w *в нуле доставляет особую точку типа либо фокус либо центр, т.е.* $D < 0$ *и собственные числа матрицы* w_* *не являются вещественными*;

(Z) *росток системы* (1) *в нуле гладко орбитально эквивалентен ростку в нуле системы* $(0,1)$, (y, w_2) *с* $w_{2,x}(0,0) = 0 < w_{2,xx}(0,0)$;

2\. *либо система не обладает локальной управляемостью в точке* P (= *нуле*), $w(P) = 0$, *и тогда она входит только в один из следующих трех классов*:

(NP) *матрица линеаризации* w_* *имеет вещественные различные собственные числа, т.е.* $D > 0$;

(NJ) *линеаризации поля* w *в нуле доставляет особую точку типа жорданов узел, т.е.* $D = 0$, *а след матрицы* w_* *ненулевой*;

(NZ) *росток системы* (1) *в нуле гладко орбитально эквивалентен ростку в нуле системы* $(0,1)$, (y, w_2) *с* $w_{2,x}(0,0) = 0 > w_{2,xx}(0,0)$.

З а м е ч а н и е. Системы, для которых в некоторой точке либо оба поля нулевые либо вблизи этой точки система гладко орбитально эквивалентна системе из случаев (Z) или (NZ), не встречаются в типичных однопараметрических семействах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантом РФФИ 06-01-00661а.

Литература

[1] Azevedo L. Transitividade Local de Sistemas Polidinamicos. Departamento de Matematica Aplicada Faculdade de Ciencias da Universidade do Porto. Janeiro / 2006.

[2] Davydov A. A. Qualitative theory of control systems // Translations of Mathematical Monographs. 141. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). viii, 147 p. (1994).

Типичные особенности выгоды однопараметрических циклических процессов с фиксированным периодом

Кукшина Е. О. (Россия)
Владимирский государственный университет
kukshina@yandex.ru

Управляемая система на окружности задается гладким векторным полем, гладко зависящим от управляющего параметра, который пробегает компактное гладкое многообразие и имеет не менее двух различных значений.

Допустимым движением системы называется абсолютно непрерывное отображение промежутка времени в окружность, у которого в точках существования производной скорость перемещения по окружности лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей в этой точке.

При наличии на окружности гладкой (непрерывной) плотности выгоды f допустимое движение системы на промежутке $[t_0, t_0 + T]$, доставляет выгоду

$$P = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(x(t))\, dt$$

и среднюю выгоду $A = \frac{P}{T}$.

Максимизация средней выгоды циклического является одной из важных прикладных оптимизационных задач. В. И. Арнольдом предложен новый подход к решению таких задач, основанный на методах теории особенностей [1].

В докладе рассмотрен случай, когда период циклического процесса задан, а скорость его развития может варьироваться, точнее зависит от выбора значения управляющего параметра. Задачи такого типа встречаются при анализе моделей различных технологических процессов.

Основной результат работы – это следующая классификация типичных особенностей наибольшей выгоды для однопараметрических циклических процессов с заданным периодом.

Теорема. *На окружности для типичного гладкого однопараметрического семейства пар плотностей выгоды и управляемых систем с положительными скоростями росток наибольшей выгоды, доставляемой движением с заданным периодом оборота, в любом значении параметра, допускающем такие движения, есть росток в нуле функции равной нулю при* $p \leqslant 0$ *и одной из функций второго столбца таблицы при* $p \geqslant 0$ *с точностью до эквивалентности, указанной в 3-м столбце. Более того, для типичной пары и любой близкой к ней график выгоды может быть переведен один в другой гладкой* Γ-*эквивалентностью близкой к тождественной.*

No	Особенность	Экв.	Условия
1	0	R^+	$\#U \geqslant 2$
2	$0, p \geqslant 0$	R^+	$\#U \geqslant 2$
3	p^2	R^+	$\#U \geqslant 2$
4	$p^{\frac{3}{2}}$	Γ	$\#U \geqslant 2$
5	p^2	R^+	$\#U \geqslant 3$
6	p^3	R^+	$\#U \geqslant 2$
7	$-p^{\frac{7}{2}}$	Γ	$\dim U > 0$

Эта классификация отличается от аналогичной для случая со свободным периодом (см. [2]), хотя и пересекается с ней по значительному числу особенностей. Здесь $\#U$ – число различных значений управляющего параметра.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантами РФФИ 06-01-00661а, и ИНТАС 05-1000008-7805.

Литература

[1] В. И. Арнольд – Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его приложения, 2002, т. 36, с. 1–11.

[2] А. А. Давыдов – Особенности типичной выгоды в модели Арнольда циклических процессов // Труды МИАН, 2005, т. 250, с. 79–94.

Глобальные и локальные краевые и обобщенные индексы особенностей пары полей и их приложения

Кунаковская О. В. (Россия)
Воронежский государственный университет
ovk@math.vsu.ru

В работах [2]–[6] Ю. Г. Борисовичем и автором было предпринято систематическое исследование на гладком компактном ориентированном многообразии с краем понятий глобального и локального топологического индекса краевой особенности 1-формы (векторного поля) (введенного В. И. Арнольдом в [1] для случая изолированной краевой особенности). Существенной частью глобальной конструкции является построенный аналог (соответствующий паре гладких сечений вещественного ориентированного евклидова векторного расслоения) индекса 1-формы вдоль гиперповерхности, введенного также в [1].

Рассматриваемые краевые и внутренние (глобальные и локальные), а также обобщенные индексы пары сечений (σ_1, σ_2) обладают естественными свойствами гомотопической инвариантности и аддитивности. Теорему В. И. Арнольда

$$I(\omega) + I_+(\omega) = \chi(M)$$

о равенстве суммы индексов 1-формы ω на многообразии M с краем ∂M эйлеровой характеристике $\chi(M)$ многообразия M (обобщение теоремы Хопфа) можно записать как

$$I(\omega) + I_+(\omega) = I(-df),$$

где неотрицательная гладкая функция $f\colon M \to \mathbf{R}$ задает уравнение края многообразия M. Такой вариант записи помог перейти для пары гладких сечений (σ_1, σ_2) векторного расслоения (E, p, M) ранга $n = \dim M$ к более общей формуле

$$B(\sigma_1, \sigma_2) = I(\sigma_2) - I(-\sigma_1),$$

позволяющей связать взаимное поведение полей (сечений) на краю и их особенности в $\operatorname{int} M$. Здесь $B(\sigma_1, \sigma_2)$ – глобальный краевой индекс пары полей (σ_1, σ_2), отличие которого от нуля гарантирует существование краевых особенностей пары сечений (σ_1, σ_2), т.е. таких точек $x \in \partial M$, в которых векторы $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ коллинеарны. $I(\sigma_i)$ – внутренний индекс сечения σ_i; при $I(\sigma_i) \neq 0$ сечение σ_i обращается в нуль в некоторой точке $\operatorname{int} M$.

Эта теория оказалась полезной при исследовании акустических волн в кристалле произвольной сингонии (см. [5]), где с ее помощью удалось оценить снизу (числом 3) полное количество направлений продольных волн, а также указать соотношения между числами направлений продольных нормалей различных типов.

Построены бесконечномерные аналоги [2], [6] описанной теории для пары нелинейных операторов (из некоторых достаточно широких классов) в сепарабельном гильбертовом пространстве и в специальных классах банаховых пространств. На этом пути получены теоремы существования обобщенных собственных векторов x: $F_2(x) = \lambda F_1(x)$ пары нелинейных операторов (F_1, F_2), уточняющие классические теоремы такого вида.

В докладе будут приведены и другие приложения введенных индексов.

Литература

[1] Арнольд В. И. Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отра-

жениями. и особые проекции гладких поверхностей. – Успехи матем. наук. 1979, т. 34, вып. 2. – С. 3–38.

[2] Borisovich Yu. G., Kunakovskaya O. V. Boundary indices of nonlinear operators and the problem of eigenvectors // Meth. and Appl. of Glob. Anal. – Voronezh, 1993. – P. 39–44.

[3] Кунаковская О. В. Краевые индексы пары сечений n-мерного векторного расслоения над n-мерным многообразием с краем. Деп. в ВИНИТИ 25 июля 1986 г., № 6317-В86, 24 с.

[4] Kunakovskaya O. V. On additivity property of the boundary index of a pair of nonlinear operators // Труды междунар. конгресса Ассоциации "Женщины-математики". Вып. 3. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1994. – С. 23–28.

[5] Борисович Ю. Г., Даринский Б. М., Кунаковская О. В. Применение топологических методов для оценки числа продольных упругих волн в кристаллах // Теорет. и матем. физика, 1993. – Т. 94, № 1. – С. 146–152.

[6] Borisovich Yu. G., Kunakovskaya O. V. Intersection theory methods in constructions of topological characteristics of solutions of nonlinear eigenvectors problem // Stochastic and Global Analysis. Voronezh, Russia, 13–19 January, 1997. Abstracts. – Voronezh, 1996. – P. 10–12.

Топологическая структура дополнений конфигураций гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ и изомонодромные деформации ассоциированных фуксовых систем

Лексин В. П. (Россия)
КГПИ
lexine@mccme.ru

В комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным эрмитовым произведением $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i v_i$ рассматриваются конфигурации гиперплоскостей $\mathcal{H} = \{H_{\alpha_1} = \ldots, H_{\alpha_N}\}$, определяемые конечными наборами неколлинеарных векторов $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subset \mathbb{C}^n$, порождающих $\mathbb{C}^n$. Каждая гиперплоскость H_{α_j} ортогональна вектору α_j. Деформации наборов векторов R определяют деформации конфигураций гиперплоскостей $\mathcal{H}$. При условиях на деформации, которые не изменяют гомотопического, топологического или диффеоморфного типа дополнения $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{j=1}^N H_{\alpha_j}$, рассматриваются ассоциированные линейные фуксовы системы на $\mathbb{C}^n$ следующего вида

$$d\Psi(z) = \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{B_\alpha \, d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \right) \Psi(z), \tag{$*$}$$

где $B_\alpha = h_\alpha \alpha^* \otimes \alpha$, $\alpha \in R$, $h \in \mathbb{C}$ являются линейными операторами на $\mathbb{C}^n$ ранга один, а именно, $B_\alpha(v) = h_\alpha(\alpha, v)\alpha$ и независят от переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$ (их называют коэффициентами фуксовой системы). Функция Ψ принимает значения в $\mathbb{C}^n$. Приводится описание условий на наборы векторов R, которые обеспечивают выполнение условий интегрируемости Фробениуса для системы $(*)$. В специальных случаях, когда набор векторов R является системой корней некоторой конечной комплексной группы отражений, дано описание представлений монодромии фуксовых систем $(*)$. Обсуждаются различные варианты постановки задачи об изомонодромной деформации систем $(*)$. Приводятся условия на деформации набора векторов R, которые дают различные типы изомонодромных деформаций системы $(*)$. Доказано, что в классе описанных выше фуксовых систем с коэффициентами ранга один не существует нетривиальных однопараметрических изомонодроиных деформаций, т.е. деформаций отличных от умножения всех параметров системы h_α на скалярные множители, зависящие от параметра деформации.

Работа ведется при содействии гранта президента России поддержки ведущих научных школ НШ-6849.2006.1 и гранта РФФИ 07-01-00085.

Литература

[1] В. И. Арнольд, Кольцо когомологий группы крашеных кос, Матем. заметки, **5** (2007), вып. 2, 227–231.

[2] В. П. Лексин, Монодромия фуксовых систем на комплексных линейных пространствах, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, **256** (2007), 267–277.

[3] R. Randell, Lattice-isotopic arrangements are topologically isomorphic, Proc. London Math. Soc. **19**, no. 4 (1989), 555–559.

[4] A. P. Veselov, On geometry of a special class of solutions to generalized WDVV equations, in “Intagrability: Seiberg–Witten and Whithem equations” (Edinburg 1998), Gordon and Breach, Amsterdam 2000, 125–136.

Мультипликативные функции вместо логарифма

Лернер Э. Ю. (Россия)
Казанский государственный университет
`lerner@ksu.ru`

В [1] В. И. Арнольд рассмотрел следующую динамическую систему, порожденную оператором конечного дифференцирования. Пусть x – замкнутая последовательность из n элементов конечного поля F_q (за n-м элементом опять следует первый). Пусть M – множество всех таких последовательностей. Определим операцию $\Delta\colon M \to M$ как переход от x к последовательности разностей соседних элементов из x. Динамическая система Δ задается ориентированным графом с вершинами, помеченными x, $x \in M$. Из каждой вершины x выходит ровно одно ребро (ведущее в Δx). Аттракторы динамической системы Δ представляют собой конечные циклы. К каждой точке аттрактора ведет дерево одного и того же вида (см. [1]). Арнольд исследовал графы динамической системы Δ для $q = 2$ и $q = 3$. Замечу, что расчеты, основанные на алгоритме из [2], позволили выписать эти графы для всех значений $n \leqslant 300$ и $n \leqslant 150$ соответственно (см. http://kek.ksu.ru/kek2/myArnold.htm). Рассмотрение этих графов позволило уточнить гипотезы Арнольда и далее доказать их.

Произвольные линейные операторы A, представимые в виде суммы $\sum_{i=0}^{m} a_i\Delta^i$, $a_i \in \mathbb{F}_q$, будем называть трансляционно-инвариантными. Если $a_0 = 0$, то оператор A будем называть дифференциальным.

В. И. Арнольд в [1] задавал компоненты начального вектора x с помощью различных функций f: $x_i = f(i)$. Если x принадлежит области притяжения цикла наибольшего периода (для заданного отображения A), причем предпериод последовательности $x, Ax, A^2x, \ldots$ максимально возможен, то функция f называется самой сложной. Если же x принадлежит области притяжения цикла наибольшего периода и предпериод на единицу меньше максимального, то f называется почти самой сложной.

Арнольд выдвинул гипотезу, что при $q = 2$ и $n + 1$ равным некоторому простому числу r алгебраическая логарифмическая функция, задаваемая формулой

$$f(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ — квадратичный вычет по модулю } r; \\ 1, & \text{если } i \text{ — квадратичный невычет по модулю } r, \end{cases} \tag{1}$$

является самой сложной или почти самой сложной для оператора Δ. К сожалению, эта гипотеза несправедлива при некоторых значениях n, например при $n = 17$. Тем не менее в [2] доказан следующий факт.

Теорема 1. *Пусть $n = r$ – нечетное простое число. Тогда функция f, заданная формулой* (1) *при $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ и доопределенная как $f(n) = f(0) = 0$, является самой сложной функцией любого трансляционно-инвариантного оператора A тогда и только тогда, когда для некоторого целого k выполнено*:

либо $n = 4k + 3$ и $\text{НОД}\,(q, k + 1) = \text{НОД}\,(q, 2k + 1) = 1$,

либо $n = 4k + 1$ и $\text{НОД}\,(q, 2k) = 1$.

Неественность доопределения логарифма формулой $f(0) = 0$ (ноль – существенно особая точка обычной логарифмической функции) послужила в [2] причиной поиска сложных функций, для которых такое доопределение общепринято. Пусть n – простое число. Функцию f из $\{1, \ldots, n - 1\}$ в F_q назовем мультипликативной, если $f(ij \bmod n) = f(i)f(j)$ для любых i, j из области определения, причем f отлична от константы. Положим $f(n) = 0$.

Теорема 2. *При* $\text{НОД}\,(n, q) = 1$ *произвольная мультипликативная функция является либо самой сложной, либо почти самой сложной функцией для любого дифференциального оператора.*

Литература

[1] Арнольд В. И. Сложности конечных последовательностей нулей и единиц // Сообщения ММО, 11, 2005; http://www.elementi.ru/lib/430178.

[2] Лернер Э. Ю. Мультипликативная функция вместо логарифма // Представлено в “Функциональный анализ и его приложения”; http://kek.ksu.ru/kek2/MyArnold.pdf.

Исследование геодезического потока на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов с использованием оператора коприсоединенного действия

Лукацкий А. М. (Россия)
ИНЭИ РАН
macrolab@eriras.ru

В докладе разбирается подход к построению решений уравнений математической физики, основанный на погружении конфигурационного пространства описываемого физического объекта в некоторую бесконечномерную группу Ли–Фреше G с алгеброй Ли g. Впервые такая конструкция была применена В. И. Арнольдом [1] для группы сохраняющих объем диффеоморфизмов.

Предполагается, что в алгебре Ли g имеется скалярное произведение $\langle u, v\rangle$, которое индуцирует на группе Ли G лево-(или право-) инвариантную метрику в зависимости от физического смысла задачи. Геодезические этой метрики являются решениями уравнений Эйлера на группе Ли G.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = adu^*u(-adu^*u).$$

Для анализа поведения решений уравнений Эйлера полезно установить вид оператора коприсоединенного действия adu^*.

Рассматриваются уравнения Эйлера на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_\mu(M)$, сохраняющих элемент объема компактного ориентированного риманова многообразия M, являющегося областью течения идеальной несжимаемой жидкости [2]. Известно, что из вида оператора $\mathrm{ad}\, u^*$ можно получить простое выражение для секционных кривизн $\mathrm{Diff}_\mu(M)$ в случае, когда M локально евклидово [3].

В докладе разбирается другая группа приложений, связанных с видом $\mathrm{ad}\, u^*$. Берется разложение в некотором ортогональном базисе $\{e_k\} \subset g$ поля скоростей $u^t = \sum_k u_k^t e_k$ идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что производные коэффициентов этого разложения удовлетворяют оценке

$$\left| \frac{\partial u_k^t}{\partial t} \right| \leqslant C(e_k) \|u^0\|^2.$$

Отсюда следует, коэффициенты u_k^t удовлетворяют условию Липшица на всем промежутке своего существования, причем норма Липшица зависит только от начальных условий u^0. Подобные оценки нередко строятся в локальных теоремах существования и единственности [4], но норма Липшица там обычно определена лишь локально. Более подробно разбирается случай n-мерного тора T^n. В качестве e_k берется базис из простых гармоник, где $k \in Z^n$. Получена оценка для выражения

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \left| \frac{\partial u_k^t}{\partial t} \right|^2$$

с мажорантой, независящей от времени t.

В случае уравнения Навье–Стокса аналогичные оценки удается получить для коэффициентов разложения векторного поля $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u$, где ν – вязкость жидкости.

Литература

[1] Arnold V. I. Sur la geometry differentielle de groupees de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluids parfaits, Ann. Inst. Fourier Vol. 16, 1966, p. 316–361.

[2] Arnold V. I., Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics, Applied Mathematical Sciences, Vol. 125, New York: Springer-Verlag, 1998.

[3] Lukatsky A. M. On the curvature of diffeomorphisms groups, Ann. Global Anal. And Geometry, Vol. 11, 1993, Berlin, p. 135–140.

[4] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения, М.: Мир, 1980.

Версальные деформации матриц: приложения и численные методы

Майлыбаев А. А. (Россия)
МГУ им. М. В. Ломоносова
mailybaev@imec.msu.ru

Доклад посвящен приложениям теории версальных деформаций матриц, разработанной В. И. Арнольдом в 1971 году. В докладе будут представлены приложения версальных деформаций к проблеме численного определения кратных собственных значений для матриц, зависящих от параметров, приложения к теории устойчивости и теории управления многопараметрических систем. Будут представлены физические эффекты, описание которых возможно при помощи теории версальных деформаций.

Об уравнениях со свойством O_1

Мирзов Дж. Д. (Россия)
Адыгейский государственный университет
`mirzov@adygnet.ru`

Рассмотрим уравнение

$$u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0, \tag{1}$$

где $n > 0$, $a\colon R_+ \to R_+$ локально суммируемая функция. Нас будет интересовать поведение правильных решений уравнения (1) в окрестности $+\infty$. Необходимые понятия и определения можно найти в [1] или [2].

Ф. В. Аткинсон [3] доказал, что если $n > 1$, то для колеблемости всех правильных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{+\infty} ta(t)\,dt = +\infty. \tag{2}$$

Ш. Белогорец [4] установил, что если $0 < n < 1$, то для колеблемости всех правильных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{+\infty} t^n a(t)\,dt = +\infty. \tag{3}$$

Известно, что для линейных уравнений второго порядка нет интегральных признаков колеблемости решений, аналогичных критериям Ф. В. Аткинсона и Ш. Белогорца. Поэтому, заметив, что если $n \to 1$ условие (3) “приближается” к (2), представляется интересным вопрос: чем является условие (2) для уравнения (1) при $n = 1$?

Ответу на этот вопрос посвящена данная работа.

Скажем, что уравнение (1) обладает свойством O_1, если каждое его правильное решение $u(t)$ является колеблющимся либо монотонно стремится к бесконечности при $t \to +\infty$.

Теорема. *Пусть $n = 1$. Тогда* (2) *есть необходимое и достаточное условие для наличия свойства O_1 у уравнения* (1).

Аналогичное утверждение получено и для двумерных нелинейных дифференциальных систем.

Литература

[1] Мирзов Дж. Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, Майкоп, РИПО “Адыгея”, 1993, 132 с.

[2] Mirzov J. D. Asymptotic Properties of Solutions of Systems of Nonlinear Nonautonomous Ordinary Differential Equations, Folia Math. Fac. sci. natur. Univ. Masaryk. brun. 2004, N 14, p. 1–178.

[3] Atkinson F. V. On second-order non-linear oscillations // Pacif. J. Math., 1955, 5, N 1, p. 643–647.

[4] Belohorec Š. Oscilatorické riešenia istej nelineárnej diferencialnej rovnice druhého rádu // Mat.-Fyz. Časop. SAV, 1961, 11, N 4, s. 250–255.

Оптимальный синтез в задача геометрии штрихов на плоскости

Моисеев И. В. (Италия)
International School for Advanced Studies, SISSA – ISAS, Trieste
moiseev@sissa.it, moiseev.igor@gmail.com

В данной задаче рассмотрена модель плоскости с каждой точкой которой связан вектор, задающий направление движения. Эта конструкция есть частный случай контактной структуры заданной на трехмерном многообразии полнотория, см. [1]. Подобные модели возникают в множестве прикладных задач, например в моделях видения [4] и робототехнике [5].

Произведено построение оптимального синтеза траектории в задаче управления и проведены исследования особенностей экспоненциального отображения. Примеры подобных исследований можно найти в статьях [2], [5] и [6]. В работе изучаются особенности субримановой сферы. Субриманова сфера имеет два типа особенностей, это самопересечения и множества точек возврата. Первый тип особенностей соответствует стратам Максвелла, а второй тип каустикам.

При построении оптимального синтеза в задаче управления наиболее важным является первое самопересечение субримановой сферы или момент потери глобальной оптимальности траектории системы. Из общей теории контактных структур, см. [1], [3], этот момент времени оценивается моментом потери локальной оптимальности, соответствующий точкам каустики.

Главным результатом работы является построение синтеза оптимального управления, что сводиться к доказательству двух фактов.

1. Характеристика время разреза или потери траекториями оптимальности.

   а. Время разреза $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\theta_0 \,|\, \rho, \beta)$ есть корень следующих уравнений

      * $Cut_1(t, \theta_0 \,|\, \rho, \beta) = \pi + 2\chi - \theta_t - \theta_0,$ в случае $\rho > 1$
      * $Cut_2(t, \theta_0 \,|\, \rho, \beta) = \pi + \theta_t - \theta_0,$ в случае $\rho < 1$

   б. Время разреза инвариантно относительно вариаций β и $\theta_0 : \mathbf{t} = \mathbf{t}(\rho)$.

   в. $\mathbf{t} \in \left[\frac{2}{\rho}K\left(\frac{1}{\rho}\right), \frac{4}{\rho}K\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$ в случае $\rho > 1$,
      $\mathbf{t} = 2K(\rho),$ в случае $\rho < 1$.

   где $K(m)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода.

2. Экстремали без точек перегиба не имеют соряженных точек, т.е. остаются локально оптимальными всюду.

Литература

[1] A. Agrachev, Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures, *J. Dynam. Control Systems* 2, No. 3, 321–358.

[2] A. Agrachev, B. Bonard, M. Chyba, and I. Kupka, Sub-Riemanian sphere in Martinet flat case. *J. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 1997, v. 2, 377–448.

[3] В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1978.

[4] J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, *J. Physiology – Paris* **97** (2003), 265–309.

[5] J. A. Reeds, L. A. Shepp, Optimal paths for a car that goes both forward and backwards, *Pacific J. Math.* **145**:2 (1990), 367–378.

[6] Yu. L. Sachkov, Discrete symmetries and Maxwell set in generalized Dido's problem, SISSA preprint 2005.

Канонические и граничные представления на симметрических пространствах

Молчанов В. Ф. (Россия)
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
molchano@molchano.tstu.ru

Канонические представления на эрмитовых симметрических пространствах G/K были введены Березиным и Вершиком, Гельфандом и Граевым – для целей квантования и квантовой теории поля. Они унитарны относительно некоторого инвариантного нелокального скалярного произведения (форма Березина). Мы думаем, что было бы естественным рассматривать канонические представления в более широком смысле: надо отказаться от условия унитарности и позволить представлениям действовать в достаточно широких пространствах функций или сечений линейных расслоений, в частности, в пространствах обобщенных функций. Понятие канонического представления (в этом широком смысле) может быть распространено на другие классы полупростых симметрических пространств G/H, как римановых, так и псевдо-римановых. Более того, иногда оказывается полезным рассматривать сразу вместе несколько пространств G/H_i, возможно с разными H_i, вложенными как открытые G-орбиты в некоторое компактное многообразие Ω, на котором G действует, так что Ω есть замыкание объединения этих орбит.

Канонические представления можно определить следующим образом. Пусть $\widetilde{G}$ – группа, содержащая G ("надгруппа"), $\widetilde{R}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – серия представлений группы $\widetilde{G}$, индуцированных характерами некоторой параболической подгруппы $\widetilde{P}$, связанной с пространством G/H, и действующих в функциях на Ω. Канонические представления R_λ группы G – это ограничения представлений $\widetilde{R}_\lambda$ на G. Вообще говоря, представления $\widetilde{R}_\lambda$ и R_λ могут еще зависеть от некоторого дискретного параметра.

Другой вариант состоит в том, что мы еще ограничиваемся на G-орбиту на Ω.

Изучение представлений в функциях на всем Ω оказывается в некотором смысле более естественным, чем изучение представлений в функциях на одной орбите. В частности, можно легко написать обратный оператор для преобразования Березина Q_λ: он есть преобразование Березина $Q_{-N-\lambda}$, где N – некоторое число. Это позволяет получить разложение ("формулу Планшереля") формы Березина для всех λ в явном и прозрачном виде.

Канонические представления порождают граничные представления – двух типов: представления одного типа действуют в обобщенных функциях, сосредоточенных на границе, представления второго типа действуют в струях, трансверсальных к границе (в коэффициентах Тейлора относительно границы).

В настоящее время явные формулы для разложения канонических и граничных представлений получены для многих симметрических пространств ранга один, в частности, для гиперболических пространств.

Рассмотрим, например, пространство Лобачевского G/K, где $G = \mathrm{SO}_0(n-1,1)$, $K = \mathrm{SO}(n-1)$. Оно есть одна пола двуполостного гиперболоида $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемым уравнением $-x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 + x_n^2 = 1$. Его размерность равна $n-1$. В качестве надгруппы мы берем $\widetilde{G} = \mathrm{SO}_0(n,1)$. Эта группа действует в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, которое получается добавлением к $\mathbb{R}^n$ координаты x_0. Группа $\widetilde{G}$ сохраняет билинейную форму $[[x,y]] = -x_0y_0 - \ldots - x_{n-1}y_{n-1} + x_ny_n$. Представления $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0,1$, – это представления группы $\widetilde{G}$, связанные с конусом $[[x,x]]=0$. Они действуют в пространстве $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ функций четности ν из $\mathcal{D}(\Omega)$ ($\mathcal{D}=C^\infty$), где Ω – сечение конуса гиперплоскостью $x_n=1$, это – единичная сфера размерности $n-1$. Группа G имеет три орбиты на Ω: две полусферы $\Omega^\pm$ ($x_0 \gtrless 0$) и экватор Ω^0 ($x_0=0$). Гиперболоид $\mathcal{L}$ можно отождествить с этой сферой без экватора. Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$ группы G – это ограничения на G представлений $\widetilde{R}_{\lambda,\nu}$. Ядро преобразования Березина есть $[[u,vJ]]^\lambda$, где $J=\mathrm{diag}\{-1,1,\ldots,1\}$, с множителем.

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ может быть распространено на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций из $\mathcal{D}(\Omega)$ четности ν. Оно порождает граничные представления $L_{\lambda,\nu}$ и $M_{\lambda,\nu}$, связанные с границей Ω^0 многообразий $\Omega^\pm$. Первое из них, т.е. $L_{\lambda,\nu}$, есть ограничение представления $R_{\lambda,\nu}$ на пространство обобщенных функций из $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$, сосредоточенных на экваторе Ω^0. Второе, т.е. $M_{\lambda,\nu}$, действует в рядах Тейлора по u_0 функций из $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$.

Мы разлагаем в явном виде канонические представления на неприводимые составляющие, разлагаем форму Березина на соответствующих пространствах и разлагаем граничные представления.

Решающую роль в разложении играют операторы $P_{\lambda,\nu,\sigma}$ и $F_{\lambda,\nu,\sigma}$, $\sigma\in\mathbb{C}$, сплетающие канонические представления с представлениями T_σ группы G, связанными с конусом (мы называем их преобразованиями Пуассона и Фурье). Полюсы по σ этих преобразований дают разложение граничных представлений. Полюсы первого порядка дают диагонализацию представлений, для полюсов второго порядка в разложении появляются жордановы клетки.

В разложении канонических представлений участвуют части граничных представлений, количество неприводимых частей зависит от λ.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований: гранты No. 05-01-00074а и No. 05-01-00001а, Голландской Организацией Научных Исследований (NWO): грант 047-017-015, Научными Программами “Развитие Научного Потенциала Высшей Школы”: проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.5.07.

Расчет нестационарных магнитных полей в пространстве с многосвязной трещиной

Науменко Я. А. (Россия)
Южный научный центр РАН
jan@novoch.ru

В работе рассматривается векторное операторное уравнение, возникающее в приложениях при моделировании нестационарных магнитных полей в однородном пространстве с электропроводящей трещиной.

Рассмотрим $L_2\left(S;\mathbb{R}^2\right)$ – пространство двухкомпонентных вектор-функций на римановой многосвязной поверхности S, суммируемых с квадратом. Будем считать, что поверхность S и ее граница l являются липшицевыми. Нормаль к S обозначим $\mathbf{n}$, а нормаль к l, лежащую в касательной к S плоскости как $\boldsymbol{\nu}$.

Согласно Вейлю [1], [2], пространство $L_2\left(S;\mathbb{R}^2\right)$ допускает разложение в прямую сумму ортогональных подпространств:

$$L_2\left(S;\mathbb{R}^2\right) = L^{(P)} \oplus \mathfrak{L}.$$

Пространство обобщенных по Вейлю потенциальных полей $L^{(P)}$ может рассматриваться как замыкание по норме $L_2\left(S;\mathbb{R}^2\right)$ множества, элементами которого являются градиенты функций из $C_0^{(1)}\left(S\right)$. Пространство обобщенных соленоидальных полей $\mathfrak{L}$ в свою очередь может быть представлено в виде:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G} \oplus L^{(S)}.$$

Здесь $\mathfrak{G}$ – конечномерное подпространство гармонических на S полей, размерность которого является топологическим инвариантом поверхности S, на единицу меньшим ее. В частности, если поверхность S односвязна, то $\mathfrak{G} = \varnothing$. Введем ортопроектор $\mathrm{P}^{\mathfrak{L}}$ из $L_2\left(S;\mathbb{R}^2\right)$ на подпространство $\mathfrak{L}$. Введем также ортопроектор $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathfrak{L}}\mathrm{P}^{\mathrm{S}}$, где P^{S} обнуляет нормальную к S компоненту поля.

Будем рассматривать следующее операторное уравнение:

$$\boldsymbol{\delta} = \lambda\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{f}(\mathbf{t}). \qquad (1)$$

Здесь $\mathrm{K} = \mathrm{P}\,\Gamma$; $\Gamma\boldsymbol{\xi} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_S \dfrac{\boldsymbol{\xi}}{r_{NM}}\,dS_N$; λ – некоторый вещественный параметр; S – двумерная трещина; $\boldsymbol{\delta}$ – неизвестная векторноя плотность потенциала простого слоя. Будем считать также, что $\|\mathbf{f}\|_{\mathfrak{L}}$ есть ограниченная функция времени при $t \in [0, \infty)$.

Свойств оператора K, показанных в [3], достаточно, чтобы спектр его был дискретен, а собственные функции образовывали в пространстве $\mathfrak{L}$ полную ортонормальную систему. На основе этого, при достаточно широких предположениях относительно гладкости функции $\|\mathbf{f}\|_{\mathfrak{L}}$ доказывается существование, единственность и численная устойчивость решения уравнения (1). Строится численный метод его решения. Приводятся примеры расчетов.

Литература

[1] Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J. – 1940. – V. 7. – P. 411–444.

[2] Friedrichs K. O. Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. on Pure and Appl. Math. – 1955. – Vol. VIII. – P. 551–590.

[3] Науменко Я. А. Локальный признак корректности и численное решение интегрального уравнения первого рода для плотности вихревых токов // Вестник Южного научного центра / РАН. – 2005. – Т. 1. № 4. – С. 3–8.

Задача Римана для уравнений мелкой воды на ступеньке

Петросян А. С. (Россия)
Институт космических исследований РАН
apetrosy@iki.rssi.ru

Рассматривается решение задачи Коши с кусочно постоянными начальными данными для уравнений мелкой воды на ступеньке. Показана множественность режимов обтекания ступеньки в зависимости от соотношения гидродинамических параметров и высоты ступеньки. Предложена аппроксимация уравнений Эйлера квазидвухслойной моделью мелкой воды, позволяющая найти однозначное решение задачи Римана для течений тяжелой жидкости в поле силы тяжести.

Метод линий уровня и анализ особенностей течений жидкости и газа

Рылов А. И. (Россия)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
rylov@math.nsc.ru

Аналитические исследования течений жидкости и газа в значительной степени опираются на различные геометрические методы и подходы [1]–[4]. Метод линий уровня основан на анализе линий уровня таких пар функций , каждая из которых монотонна вдоль линии уровня другой функции [4]–[7]. Как оказывается, в области эллиптичности свойством монотонности обладает решение произвольной однородной системы двух уравнений первого порядка [5]. Важным этапом в развитии метода является построение алгоритма преобразования неоднородных систем в однородные [5], позволившего вовлечь в рассмотрение ряд новых пар функций, их линий уровня и новые физические объекты, например, осесимметричне течения [5]–[7] и др..

Метод особенно эффективен при совместном анализе особых точек (бесконечно удаленной точки, точек ветвления, точек торможения и разрыва кривизны на обтекаемом теле и т.д.) и связанных с ними линий уровня. В ряде случаев такой анализ позволяет сопоставить обтекаемому телу структуру особых точек и характерных линий уровня и выявить принципиальные свойства течений.

Опуская ряд результатов для плоских вихревых течений между телом и ударной волной (Никольский 1949, Шифрин 1966, 69, Рылов 1991–2003) и осесимметричных потенциальных течений (Шифрин 1971, Рылов 1995–2003) более подробно остановимся на исследовании особых точек обращения в нуль вектора ускорения и связанной с ними структуры линий нулевых значений компонент вектора ускорения в задачах дозвукового обтекания тел. С использованием обозначений M – число Маха и ρ – плотность, система уравнений на плоскости потенциала (φ, ψ) такова [6], [7]:

$$kU_\varphi - V_\psi = 0, \quad U_\psi + V_\varphi = 0; \qquad k = (1 - M^2)/\rho^2.$$

Здесь U и V с точностью до положительных сомножителей равны, соответственно, продольной (вдоль линии тока) и поперечной компонентам F и G вектора ускорения. Данная система и функции U и V особенно интересны при изучении линий нулевых значений компонент вектора ускорения. Линия $V = G = 0$ имеет и ясный физический смысл, либо как линия точек перегиба линий тока, либо как прямая линия тока. Анализ линий $F = 0$ и $G = 0$ лежит в основе следующей теоремы [7].

Теорема. *Из каждой особой точки i вне обтекаемого тела выходят четное число $N(i)$ линий $F = 0$, $G \neq 0$ и $N(i)$ линий $G = 0$, $F \neq 0$, $N(i)$ зависит от порядка особенности и от того, является ли точка i бесконечно удаленной точкой или нет.*

Следствие. *Если точки растекания и схода находятся на обтекаемом теле (классическая схема обтекания), то все указанные линии приходят на тело. Анализ геометрии тела, точек разрыва кривизны, растекания и схода позволяет оценить значение $S = \sum N(i)$ и указать на принципиальные свойства течений.*

Работа поддержана Междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН “Актуальные проблемы теории функций и гидродинамики” (проект № 117).

Литература

[1] Arnold V. I., Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics. N.Y.: Springer, 1997. 374 p.

[2] Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

[3] Busemann A. Gasdynamik // Handbuch der experimentalphysik V. 4.1. Leipzig: Akad. Verlag, 1931. P. 341–460.

[4] Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.

[5] Рылов А. И. Свойства монотонности решений эллиптических систем первого порядка и их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 758–766.

[6] Рылов А. И. О свойствах однородных систем уравнений газовой динамики для компонент вектора ускорения // Сиб. ж. индустр. математики. 1998. Т. 1. № 2. С. 169–174.

[7] Рылов А. И. Топология линий нулевых значений компонент вектора ускорения в дозвуковых течениях // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 400–411.

Локальные задачи анализа по Арнольду: рациональность ряда Пуанкаре и теорема Трессе

Саркисян Р.А. (Россия)
Финансовая Академия при Правительстве РФ
voidcaller@mail.domonet.ru

В работах В. И. Арнольда [1] (задача 1994-24) и [2] была предложена задача исследования рациональности ряда Пуанкаре в т.н. «локальных задачах анализа». В докладе с помощью техники базисов Гребнера строится страт V наибольшей размерности для произвольного действия псевдогруппы Ли, который оказывается открытым всюду плотным множеством в соответствующем пространстве бесконечных струй J^∞ (этот страт является дополнением к пересечению подходящего набора гиперповерхностей). Доказывается рациональность ряда Пуанкаре построенного страта, V-регулярность точек страта V, справедливость теоремы Трессе для всех точек этого страта и ряд других результатов. (Точка x подмножества $S \subseteq J^\infty$ называется S-регулярной, если существует окрестность U этой точки такая, что ряды Пуанкаре у всех точек из $U \cap S$ совпадают.) На примере классификации струй векторных полей на многообразии (пример 2 из [1]) демонстрируется, что вне страта V (образованного струями неособых полей) картина усложняется: имеются открытые в пространстве $G = J^\infty - V$ области, состоящие из точек, не являющихся G-регулярными. Каждой «локальной задаче анализа» соответствует действие своей группы диффеоморфизмов, т.е. подходящей псевдогруппы Ли. Это позволяет для таких задач получить страт наибольшей размерности и теорему Трессе из приведенных выше общих результатов.

Литература

[1] Arnold V. I., Mathematical problems in classical physics, Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Appl. Math. Series, V. 100), Springer, 1994, 1–20.

[2] Задачи Арнольда, М., «ФАЗИС», 2000.

Некоторые классы нелинейных гиперболических уравнений с квазипериодическими решениями

Сахаров А. Н. (Россия)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
dynamic@mm.unn.ru
Сидоров Е. А. (Россия)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
dynamic@mm.unn.ru

Вопрос о периодических, квазипериодических решениях различной структуры для определенных видов уравнений в частных производных рассматривался во многих работах, например, в [1]–[4]. Представляют интерес случаи существования дискретного множества (конечного, счетного) соответствующих решений специального вида –

аналитических квазипериодических или более общего вида. Ниже выделяются уравнения в частных производных в конструктивной форме, имеющие заданные множества таких решений (периодических или квазипериодических по всем переменным и т.д.). Естественно, что в самих уравнениях явно отражена структура решений.

Имеются ввиду два случая: 1) вопрос о числе соответствующих решений рассматривается в пространстве аналитических функций с фиксированным набором частот (отдельно для вещественного и комплексного случаев), 2) постановка задачи о числе соответствующих решений относится к заранее указанному подпространству функций с дополнительными условиями, например, неотрицательность индексов в комплексном разложении Фурье. В обоих случаях исходным является линейное уравнение в частных производных относительно $u(x, y)$:

$$Lu = 0. \tag{1}$$

Приведем некоторые полученные результаты. Случай 1.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *имеет нетривиальные квазипериодические решения с частотами* $\omega_1, \ldots, \omega_m$ *по* x *и* y. *Выберем такое одно (для краткости) решение* $u = \varphi(x, y)$. *Предположим, что сопряженное уравнение* $L^*u = 0$ *имеет нетривиальное квазипериодическое решение* $v = \psi(x, y)$. *Построим дифференциальное уравнение, имеющее* n *различных квазипериодических решений в пространстве аналитических квазипериодических функций* $H(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ *в виде*

$$Lu = \overline{\psi}(x, y)\left|\prod_{k=1}^{n}(u - a_k\varphi(x, y))\right|. \tag{2}$$

Тогда других, отличных от $u_k = a_k\varphi(x, y)$, *квазипериодических решений уравнение* (2) *не имеет.*

Случай 2. Здесь выбирается пространство H квазиполиномов вида

$$u = \sum_k P_k(x) e^{i\langle A_k x, \omega\rangle},$$

где, A_k – матрицы, элементы котоых – натуральные числа, $x \in R^m$. Рассматривается вопрос о числе решений в пространстве H уравнения (3) (см. ниже).

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение* $u = \varphi(x) \in H$. *Тогда уравнение, аналогичное* (2)

$$Lu = \prod_{k=1}^{n}(u - a_k\varphi(x)) \tag{3}$$

не имеет других решений из пространства H, *отличных от* $a_k\varphi(x)$.

Литература

[1] Забрейко П. П., Третьякова Л. Г. Периодические решения квазилинейного телеграфного уравнения // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 5. С. 815–826.

[2] Митропольский Ю. А., Хома Н. Г., Хома С. Г. Гладкие решения задачи Дирихле для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка // Укр. мат. журнал. 2000. Т. 52. № 7. С. 931–935.

[3] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 95–120.

[4] Сахаров А. Н., Сидоров Е. А. О числе периодических решений некоторых гиперболических нелинейных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2006. № 11. С. 188–189.

Оптимальность эйлеровых эластик

Сачков Ю. Л. (Россия)
Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский
`sachkov@sys.botik.ru`

В 1744 г. Леонард Эйлер рассмотрел следующую задачу о стационарных конфигурациях упругого стержня. Дан упругий стержень на плоскости, у которого закреплены положения концов, а также углы наклона на концах. Требуется определить возможные профили стержня при заданных граничных условиях. Эйлер получил дифференциальные уравнения для стационарных конфигураций стержня и описал их возможные качественные типы. Эти конфигурации называются эйлеровыми эластиками.

Эйлеровы эластики суть критические точки функционала упругой энергии на пространстве кривых с фиксированными концами и касательными на концах. Вопрос о том, какие из этих критических точек являются точками минимума (локального или глобального), оставался открытым. Данная работа посвящена исследованию этого вопроса.

Экспоненциальное отображение в задаче Эйлера параметризуется функциями Якоби. На основе анализа дискретных симметрий этого отображения получены оценки для точек разреза и сопряженных точек (т.е. точек, в которых экстремальные траектории теряют соответственно глобальную и локальную оптимальность). В частности, решена задача об устойчивости эйлеровых эластик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00703-а).

Литература

[1] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler's elastic problem, arXiv:0705.0614 [math.OC], 3 May 2007.

[2] Yu. L. Sachkov, Conjugate points in Euler's elastic problem, arXiv:0705.1003 [math.OC], 7 May 2007.

[3] Ю. Л. Сачков, Оптимальность эйлеровых эластик, Доклады Академии Наук, *в печати.*

Асимптотика решений матричных интегро-дифференциальных уравнений

Сгибнев М. С. (Россия)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
sgibnev@math.nsc.ru

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$X'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_{jm}(t) = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} * X_{jm}(t) + F_{im}(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, n_1$, где $X_{im}(t)$ — неизвестные функции, $A_{ij} \in \mathbf{C}$, $K_{ij}(t)$, $F_{im}(t)$ — комплексные измеримые функции такие, что при некотором $\gamma \in \mathbf{R}$ интегралы $\int_0^\infty e^{\gamma t} |K_{ij}(t)|\, dt$ и $\int_0^\infty e^{\gamma t} |F_{im}(t)|\, dt$ конечны; символ $*$ означает свертку функций. Запишем систему (1) в матричной форме

$$\mathbf{X}'(t) + \mathbf{A}\mathbf{X}(t) = \mathbf{K} * \mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, — полумультипликативная функция, т. е. $\varphi(x)$ конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)\, \varphi(y)$, x, $y \geqslant 0$. Известно, что

$$r_+(\varphi) := \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \inf_{x > 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} < \infty.$$

Предположим, что $r_+(\varphi) > -\infty$. Для произвольной функции $g(t)$, $t \geqslant 0$, обозначим через $\widehat{g}(s)$ ее производящую функцию моментов:

$$\widehat{g}(s) := \int_0^\infty e^{st} g(t)\, dt.$$

Допустим, что множество $\mathcal{Z} := \{s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_l\}$ корней характеристического уравнения

$$\det[\mathbf{A} - s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{K}}(s)] = 0, \tag{3}$$

лежащих в полуплоскости $\Pi(\varphi) := \{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} s \leqslant r_+(\varphi)\}$, конечно. Мы не исключаем случая $\mathcal{Z} = \emptyset$. Положительное целое число m_j

называется кратностью корня s_j характеристического уравнения (3), если

$$\det[\mathbf{A} - s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{K}}(s)] = (s - s_j)^{m_j} g(s), \qquad g(s_j) \neq 0.$$

Обозначим через $|\mathbf{K}(t)|$ матрицу $(|K_{ij}(t)|)$. Пусть $s_j \in \mathcal{Z}$ и

$$\int_0^\infty t^{m_j} e^{\operatorname{Re} s_j t} |\mathbf{K}(t)|\, dt < \infty, \qquad \int_0^\infty t^{m_j} e^{\operatorname{Re} s_j t} |\mathbf{F}(t)|\, dt < \infty.$$

Положим

$$\mathbf{H}(s) := [\mathbf{A} - s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{K}}(s)]^{-1} [\mathbf{X}(0) + \widehat{\mathbf{F}}(s)].$$

Определим матричные коэффициенты $\mathbf{B}_{jk}$, $k = 1, \ldots, m_j$, из асимптотического разложения

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{\mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + o\left(\frac{1}{s - s_j}\right), \qquad s \to s_j. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(t)/e^{r_+(\varphi)t}$, $t \geqslant 0$, не убывает. Пусть $\mathcal{Z} = \{s_1, \ldots, s_l\}$ — множество всех корней характеристического уравнения (3), лежащих в полуплоскости $\Pi(\varphi)$. Обозначим через $m_1, \ldots, m_l$ кратности корней $s_1, \ldots, s_l$ соответственно. Положим N равным максимальной кратности корней этого уравнения, лежащих на прямой $\{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} s = r_+(\varphi)\}$ (если таких корней на указанной прямой не имеется, то $N := 0$). Предположим, что*

$$\int_0^\infty t^{2N} \varphi(t) |\mathbf{K}(t)|\, dt < \infty, \qquad \int_0^\infty t^N \varphi(t) |\mathbf{F}(t)|\, dt < \infty.$$

Тогда для решения $\mathbf{X}(t)$ уравнения (2) с начальными значениями 0, $\mathbf{X}(0)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} \mathbf{B}_{jk} \frac{t^{k-1} e^{-s_j t}}{(k-1)!} + \boldsymbol{\Delta}(t),$$

в котором матричные коэффициенты $\mathbf{B}_{jk}$ определяются из асимптотического разложения (4), а остаток $\boldsymbol{\Delta}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty \varphi(t) |\boldsymbol{\Delta}(t)|\, dt < \infty.$$

Кроме того, $\varphi(t)\boldsymbol{\Delta}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$.

Аналогичный результат для “одномерного” интегро-дифференциального уравнения ($n = n_1 = 1$) был получен в работе [1].

Литература

[1] Сгибнев М. С. Асимптотика решений интегро-дифференциального и интегрального уравнений // Дифф. уравнения. – 2006. – Т. 42, N 9. – С. 1222–1232.

О некоторых обобщениях неравенства Коши–Буняковского

Ситник С. М. (Россия)
Воронежский институт МВД
`mathsms@yandex.ru`

Среди нетривиальных обобщений дискретного неравенства Коши – Буняковского одним из наиболее известных результатов является теорема Карлица – Элиезера – Дэйкина (CDE)(см. [1]–[2]), которую мы переформулируем с использованием средних.

Теорема CDE. *Уточнение дискретного неравенства Коши – Буняковского вида*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k, y_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} g^2(x_k, y_k)\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \qquad (1)$$

выполняется тогда и только тогда, когда величины $f(x, y), g(x, y)$ *являются парой произвольных взаимно сопряжённых средних* [4–6], *удовлетворяющих свойствам однородности и монотонности по каждому аргументу.*

Данная формулировка в терминах средних делает более понятным оригинальный результат, кроме того снабжает его огромным числом конкретных примеров с использованием многочисленных известных средних [4–6]. Прототипом теоремы CDE послужило известное неравенство Милна [2–3].

Рассмотрим интегральный аналог теоремы CDE. Оказывается, что справедлив следующий неожиданный результат: сохраняется лишь достаточная часть теоремы.

Теорема 1. *Пусть M – произвольное однородное, монотонное по каждому аргументу абстрактное среднее (необязательно симметричное!), $M^* = xy/M(x,y)$ – сопряжённое среднее* (см. [4–6]). *Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши – Буняковского вида*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (M(f,g))^2\,dx \int_a^b (M^*(f,g))^2\,dx \leqslant \int_a^b (f(x))^2\,dx \int_a^b (g(x))^2\,dx. \tag{2}$$

Мои любимые следствия из этой теоремы получаются при выборе арифметико-геометрического среднего Гаусса и максимума–минимума.

Следствие 1. *Справедливо неравенство:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \left[\frac{\max(f,g)}{K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)}\right]^2 dx$$

$$\times \int_a^b (\min(f,g))^2 \left(K\left(\sqrt{1-\left(\frac{\min(f,g)}{\max(f,g)}\right)^2}\right)\right)^2 dx \leqslant \int_a^b f^2\,dx \int_a^b g^2\,dx,$$

где $K(x)$ есть полный эллиптический интеграл Лежандра 1 *рода.*

Отметим экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между *произвольными* функциями, но которые стоят под знаком *конкретной специальной* функции – эллиптического интеграла Лежандра!

Следствие 2. *Справедливо неравенство:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [\max(f,g)]^2\,dx \cdot \int_a^b [\min(f,g)]^2\,dx$$
$$\leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx. \qquad (3)$$

Для интегрального случая необходимая часть теоремы CDE не выполняется, что следует из существования найденных автором других обобщений неравенства Коши – Буняковского, которые не приводятся к виду (2), а имеют иную структуру.

Рассматриваются приложения полученных результатов к оценкам специальных функций и решений дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and new inequalities in analysis. — Kluwer, 1993.

[2] Dragomir S. S. A Survey on Cauchy – Buniakowsky – Schwartz Type Discrete Inequalities. — http://rgmia.vu.edu.au/monographs, 2003.

[3] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ. – 1948.

[4] Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши – Буняковского методом средних значений и их приложения // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия “Фундаментальная математика”. – 2005. – № 1(1). – С. 3–42.

[5] Ситник С. М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши – Буняковского // Вестник Самарской государственной экономической академии. – 2002. – № 1(8). – С. 302–313.

[6] Ситник С. М. Уточнение интегрального неравенства Коши – Буняковского // Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. “Физико-математические науки”. – 2000. – № 9. – С. 37–45.

Ветвление собственных значений задачи Орра–Зоммерфельда

Скороходов С. Л. (Россия)
ВЦ РАН
skor@ccas.ru

Изучается задача Орра – Зоммерфельда на отрезке $y \in [-1,\, 1]$:

$$\frac{1}{i\alpha R}\left[\varphi^{(IV)}(y) - 2\alpha^2\,\varphi''(y) + \alpha^4\,\varphi(y)\right] - \left[U(y) - \lambda\right]\left[\varphi''(y) - \alpha^2\,\varphi(y)\right]$$

$$+U''(y)\,\varphi(y) = 0\,,$$

с краевыми условиями $\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0$. Здесь параметр $R > 0$ – число Рейнольдса, $\alpha > 0$ – волновое число, $U(y)$ – функция скорости основного потока жидкости, λ и $\varphi(y)$ – искомые собственные значения (СЗ) и собственные функции.

Для профиля скорости $U(y)$ рассматривают течение Куэтта $U(y) = y$, течение Пуазейля $U(y) = 1 - y^2$, либо общее течение Куэтта – Пуазейля $U(y) = ay^2 + by + c$.

Для решения задачи разработан метод, использующий представление $\varphi(y)$ в виде комбинации четырех степенных разложений в окрестности граничных точек:

$$\varphi_{(1,\,2)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1,\,2)}(y+1)^{k+2}\,, \qquad \varphi_{(3,\,4)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(3,\,4)}(1-y)^{k+2}\,, \quad (1)$$

где для коэффицентов $d_k = d_k(R, \alpha, \lambda)$ и $e_k = e_k(R, \alpha, \lambda)$ получены рекуррентные уравнения шестого порядка. С помощью теории Пуанкаре – Биркгофа исследована асимптотика решений d_k и e_k при $k \to \infty$. Показано, что в случае течения Куэтта – Пуазейля асимптотика коэффициентов d_k и e_k имеет вид $d_k/d_{k-1} \sim k^{-1/2}$, а в случае течения Куэтта — $d_k/d_{k-1} \sim k^{-2/3}$, то есть ряды (1) задают целые функции.

Преставляя решение $\varphi(y)$ в виде комбинации разложений (1) и осуществляя сшивку решений в некоторой точке $y_* \in (-1, 1)$, получаем уравнение для вронскиана

$$\mathrm{Wr}(\lambda) \;=\; \mathrm{Wr}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4;\; \lambda;\; y_*) \;=\; 0\,; \qquad (2)$$

это уравнение является основным для вычисления искомого спектра $\lambda_n(R)$.

Для случая течения Куэтта детально исследованы траектории СЗ $\lambda_n(R)$ при изменении числа $R \in (0, 10^6)$. Численно показано, что функции $\lambda_n(R)$ имеют в окрестности узловой точки $\lambda_* = -i/\sqrt{3}$ счетное множество точек ветвления R_k второго порядка, в окрестности которых пара СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ имеет поведение

$$\lambda_{n,m}(R) = \pm\sqrt{R - R_k}\ \Psi(R) + \Phi(R)\,,$$

где $\Psi(R)$ и $\Phi(R)$ – регулярные функции в окрестности точки $R = R_k$. При непрерывном увеличении числа $R > 0$ пары СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ сначала образуют при $R = R_k$ двойные СЗ на мнимой оси, которые затем распадаются на пары простых СЗ, симметричных относительно мнимой оси. При дальнейшем увеличении числа R эти простые СЗ приближаются к своему предельному графу — двум симметричным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, соединяющим точку $\lambda_* = -i/\sqrt{3}$ с точками $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

Процесс образования и распада двойных СЗ соответствует переходу СЗ с нижней ветви спектра, расположенной на мнимой отрицательной оси, на четыре других ветви, окаймляющих отрезки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Картина распределения СЗ в совокупности составляет портрет "спектрального галстука".

Для вычисления точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$ был разработан специальный итерационный метод, позволивший найти их с точностью до 100 десятичных значащих цифр вплоть до чисел Рейнольдса $R = 10^6$.

Приведем значения первых четырех точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$ для течения Куэтта с волновым числом $\alpha = 1$:

$$R_1 = 61.917759,\ \ \lambda_{3,4} = -0.79983498i\,;$$

$$R_2 = 65.520229,\ \ \lambda_{1,2} = -0.38816096i\,;$$

$$R_3 = 205.777781,\ \ \lambda_{6,7} = -0.66527009i;$$

$$R_4 = 214.403383,\ \ \lambda_{6,7} = -0.64739767i\,.$$

Проведенный численный анализ позволяет предположить, что верна

Гипотеза. *Собственные значения* $\lambda_n(R)$ *задачи Орра – Зоммерфельда для течения Куэтта, рассматриваемые как функции числа Рейнольдса* R *при фиксированном* $\alpha > 0$ *, имеют счетное множество точек ветвления второго порядка* $R_k > 0$*, в которых двойные СЗ* $\lambda_{n,m}(R_k)$ *чисто мнимые отрицательные и справедливо*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n,m}(R_k) \to -\frac{i}{\sqrt{3}}\,.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07-01-00295, 07-01-00503) и Программы № 3 ОМН РАН.

О янгианах супералгебр Ли

Стукопин В. А. (Россия)
Донской государственный технический университет
stukopin@mail.ru

Рассмотрено квантование по В. Г. Дринфельду полиномиальных (скрученных и нескрученных) алгебр токов со значениями в супералгебре Ли типа $A(m,n)$. Результат квантования (квантовая алгебра, называемая янгианом), описан в терминах образующих и соотношений. В некоторых случаях проведено вычисление универсальной R-матрицы. Рассмотрены возможные приложения в теории интегрируемых моделей квантовой теории поля.

Конкретная теория чисел: первичные числа и удивительные свойства чисел repunit

Тарасов Б. В. (Россия)
Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск
tarasov@itp.nsc.ru

1. Пусть $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ целые числа. Целые числа вида

$$E_{n,k} = (10^{(k+1)(n+1)} - 1)/(10^{k+1} - 1)$$

назовем первичными (initial) числами. При $k = 0$ получаем числа repunit (см.[3,4]) $R_{n+1} = (10^{n+1} - 1)/9$.

2. Для чисел repunit доказываются следующие утверждения.

Теорема 1 $(R_a, R_b) = R_{(a,b)}$, где $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ целые числа.

Теорема 2 Пусть $p > 3$ простое число, $k \geqslant t \geqslant 1$, $t \geqslant s \geqslant 1$ целые числа. Тогда $gcd(R_{p^k}/R_{p^t}, R_{p^s}) = 1$.

Теорема 3 Пусть $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ целые числа, тогда справедливы следующие утверждения :

(1) Если $(a, b) = 1$, то $gcd(R_{ab}, R_a R_b) = R_a R_b$.

(2) Если $(a, b) > 1$, то $R_a R_b / R_{(a,b)} \leqslant gcd(R_{ab}, R_a R_b) < R_a R_b$.

Теорема 4 Число $R_{ab}/(R_a R_b)$ целое тогда и только тогда, когда $(a, b) = 1$, где $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ целые числа.

Лемма 1 Если $a = 3^n b$, $(b, 3) = 1$, то $R_a \equiv 0 (mod\, 3^n)$, но $R_a \not\equiv 0 (mod\, 3^{(n+1)})$.

Лемма 2 Для целого числа $a \geqslant 1$ справедливы утверждения :

(1) Если a нечетное, то $R_a \not\equiv 0 (mod\, 11)$.

(2) Если $a = 2(11^n)b$, $(b, 11) = 1$, то $R_a \equiv 0 (mod\, 11^{n+1})$, но $R_a \not\equiv 0 (mod\, 11^{n+2})$.

Предположение [Общая формула для $gcd(R_{ab}, R_a R_b)$**]** Если $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ целые числа, $d = (a, b)$, где $d = 3^L \cdot 11^S \cdot c$, $(c, 3) = 1$, $(c, 11) = 1$, $L \geqslant 0$, $S \geqslant 0$, то справедливы равенства :

— если c нечетное число, то $gcd(R_{ab}, R_a R_b) = ((R_a R_b)/R_{(a,b)}) \cdot 3^L$,

— если c четное число, то $gcd(R_{ab}, R_a R_b) = ((R_a R_b)/R_{(a,b)}) \cdot 3^L \cdot 11^S$.

3. Основные открытые проблемы чисел repunit, где $p > 3$ простое число.

Проблема 1 (Prime repunit numbers [4]). Существует ли бесконечно много
простых чисел R_p?

Проблема 2 Все ли числа R_p являются числами свободными от квадратов?

Проблема 3 Если число R_p свободно от квадратов, то найдется ли число n, такое, что число R_{p^n} содержит квадрат?

Литература

[1] Арнольд И. В. *Теория чисел. - М. : Учпедгиз, 1939.*

[2] Виноградов И. М. *Основы теории чисел. - М. : Наука, 1981.*

[3] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики : Пер. с англ. - М. : Мир, 1998.*

[4] Weisstein, Eric W. *"Repunit."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. —http://mathworld.wolfram.com/Repunit.html/. ©1999—2007 Wolfram Research, Inc.*

[5] Ribenboim, P. *"Fermat Numbers" and "Numbers* $k \times 2^n \pm 1$*."§2.6 and 5.7 in The New Book of Prime Number Records. New York: Springer-Verlag, pp. 83-90 and 355-360, 1996.*

[6] Tarasov, B. V. *"The concrete theory of numbers: initial numbers and wonderful properties of numbers repunit". – Bell available at http://arxiv.org/abs/0704.0875*

Новая компактификация схемы модулей стабильных векторных расслоений на алгебраической поверхности

Тимофеева Н. В. (Россия)
Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского
ntimofeeva@list.ru

Пусть S – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, $H \in Pic(S)$ – класс обильного дивизора на S, $\mathcal{O}_S(H)$ – соответствующий обильный обратимый пучок. Рассматривается схема модулей M_0 стабильных по Гизекеру векторных расслоений E, имеющих фиксированный многочлен Гильберта $P(t) = \chi(E \otimes \mathcal{O}_S(H)^{\otimes t})$. Символ χ означает эйлерову характеристику пучка.

В отличие от классической компактификации схемы модулей стабильных векторных расслоений полустабильными пучками без кручения, в предлагаемой компактификации семейства пар (E, S), где E – векторное расслоение и S – исходная поверхность, пополнены парами $(\widetilde{E}, \widetilde{S})$, где $\widetilde{E}$ – векторное расслоение, и $\widetilde{S}$ – поверхность, являющаяся модификацией поверхности S.

Пусть $\overline{M} \supset M_0$ – компактификация схемы M_0 по Гизекеру – Маруяме. Точки схемы $\overline{M}$ представляют классы полустабильных пучков без кручения, имеющих многочлен Гильберта, равный $P(t)$. Пусть $\Sigma = \overline{M} \times S$ – тривиальное семейство поверхностей, и $\mathbf{E}$ – универсальное семейство стабильных пучков, соответствующее тонкому пространству модулей $\overline{M}$. В этом случае доказаны [2] следующие результаты:

Теорема 1. *Существуют*
(i) $\widetilde{M}$ *– проективное алгебраическое многообразие;*
(ii) $\widetilde{\Sigma}$ *– проективное многообразие с плоским морфизмом* $\widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{M}$*, слои которого составляют семейство поверхностей над многообразием* $\widetilde{M}$*,*
(iii) $\mathcal{H}$ *– семейство поляризаций на слоях семейства* $\widetilde{\Sigma}$*, такое, что многочлен Гильберта* $\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{y})}(t\mathcal{H}|_{\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{y})}))$ *слоя* $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{y})$ *не зависит от выбора точки* $\widetilde{y} \in \widetilde{M}$*,*

(iv) $\widetilde{\mathbf{E}}$ *– локально свободный пучок на схеме* $\widetilde{\Sigma}$*,*
(v) морфизм $\phi : \widetilde{M} \to \overline{M}$*,*
(vi) морфизм семейств поверхностей $\Phi : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$*,*
такие, что
i) морфизм ϕ *бирационален,*
ii) схема $\widetilde{M}$ *содержит открытую подсхему* $\widetilde{M}_0$*, такую, что* $\phi|_{\widetilde{M}_0} : \widetilde{M}_0 \to M_0$ *является изоморфизмом,*
iii) морфизм Φ *бирационален,*
iv) морфизм Φ *изоморфно отображает открытую подсхему* $\widetilde{\Sigma}_0 = \widetilde{\pi}^{-1}\widetilde{M}_0$ *на подсхему* Σ_0*,*
v) имеет место равенство пучков $(\Phi_*\widetilde{\mathbf{E}})^{\vee\vee} = \mathbf{E}$.

Обозначим за E_y пучок – член семейства $\mathbf{E}$, соответствующий точке $y \in \overline{M}$.

Теорема 2. *(i) Существует пучок идеалов* $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\widetilde{M}\times S}$*, такой, что проекция* $\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{M}$ *представима в виде композиции*

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\widehat{\sigma}} \widetilde{M} \times S \xrightarrow{pr_{\widetilde{M}}} \widetilde{M},$$

в которой $\widehat{\sigma}$ *– морфизм раздутия в пучке идеалов* $\mathcal{J}$*, морфизм* $pr_{\widetilde{M}}$ *– проекция на прямой сомножитель.*

(ii) Слой проекции $\widetilde{\pi}$ *над общей точкой* $\widetilde{y} \in \widetilde{M}_0$ *изоморфен поверхности* S*. Слой над специальной точкой* $\widetilde{y} \in \widetilde{M} \setminus \widetilde{M}_0$ *– приводимая поверхность, компонента которой изоморфна раздутию поверхности* S *в пучке нулевых идеалов Фиттинга* $\mathcal{F}itt^0(\mathcal{E}xt^1(E_{\phi(\widetilde{y})}, \mathcal{O}_S))$*.*

Также указаны условия, при которых компактификация $\widetilde{M}$ определяется однозначно заданием поляризованной поверхности (S, H) и многочленом $P(t)$.

В случае, когда $\overline{M}$ – грубое пространство модулей, рассматривается этальное покрытие $\{\beta_i : B_i \to \overline{M}, i = 1, \dots, N\}$ схемы $\overline{M}$, снабженное псевдосемейством пучков $\{\mathbf{E}_i\}$ в смысле определения Эллингсруда и Гёттше [1]. Пусть $B_{i0} = \beta_i^{-1}(\beta_i(B_i) \cap M_0)$, $\Sigma_i = B_i \times S$, $\Sigma_{i0} = B_{i0} \times S$. Доказана

Теорема 3. *Существуют*
(i) $\widetilde{M}$ *– проективная алгебраическая схема,*
(ii) этальное покрытие $\coprod \widetilde{B}_i \to \widetilde{M}$*,*
(iii) $\widetilde{\Sigma}_i$ *– набор квазипроективных многообразий, снабженных плос-*

кими морфизмами $\widetilde{\Sigma}_i \xrightarrow{\widetilde{\pi}_i} \widetilde{B}_i$*, слои которых образуют семейства поверхностей,*
(iv) $\mathcal{H}_i$ *– набор семейств поляризаций на слоях семейств* $\widetilde{\Sigma}_i$*, такой, что многочлен Гильберта* $\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{\pi}_i^{-1}(\widetilde{y})}(t\mathcal{H}_i|_{\widetilde{\pi}_i^{-1}(\widetilde{y})}))$ *слоя* $\widetilde{\pi}_i^{-1}(\widetilde{y})$ *не зависит от выбора точки* $\widetilde{y} \in \widetilde{B}_i$*,*
(v) $\widetilde{\mathbf{E}}_i$ *– набор локально свободных пучков на схемах* $\widetilde{\Sigma}_i$*,*
(vi) *морфизм схем* $\phi : \widetilde{M} \to \overline{M}$*,*
(vii) *морфизм этальных покрытий* $\phi_i : \widetilde{B_i} \to B_i$*,*
$(viii)$ *морфизм семейств поверхностей* $\Phi_i : \{\widetilde{\Sigma}_i\} \to \{\Sigma_i\}$*,*
такие, что
i) морфизм ϕ *бирационален,*
ii) схема $\widetilde{M}$ *содержит открытую подсхему* $\widetilde{M}_0$*, такую, что морфизм* $\phi|_{\widetilde{M}_0} : \widetilde{M}_0 \to M_0$ *является изоморфизмом,*
iii) морфизмы ϕ_i *бирациональны,*
iv) каждая схема $\widetilde{B}_i$ *содержит открытую подсхему* $\widetilde{B}_{i0}$*, такую, что морфизм* $\phi_i|_{\widetilde{B}_{i0}} : \widetilde{B}_{i0} \to B_{i0}$ *является изоморфизмом,*
v) морфизмы Φ_i *бирациональны,*
vi) каждый морфизм Φ_i *отображает открытую подсхему* $\widetilde{\Sigma}_{i0} = \widetilde{\pi}_i^{-1}\widetilde{B}_{i0}$ *изоморфно на подсхему* Σ_{i0}*,*
vii) имеет место равенство псевдосемейств пучков, задаваемое на элементах B_i *этального покрытия равенством* $(\Phi_{i*}\widetilde{\mathbf{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbf{E}_i$*.*

Литература

[1] Ellingsrud, G. & Göttsche, L. Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization. // J. reine angew. Math., 467 (1995), pp. 1–49.

[2] Timofeeva, N. V. On the new compactification of moduli of vector bundles on a surface, I. Preprint, Institut Mittag-Leffler, 2007, no. 13. www.ml.kva.se

Гиперболичность абстрактных функциональных операторов

Трубников И. Ю. (Беларусь)
Белорусский государственный университет, Минск
itrubnikov@gmail.com

Пусть B — банахова алгебра, A — замкнутая подалгебра в B, а T — представление группы $\mathbb{Z}$ в B, и для них выполнены следующие аксиомы:

1. $TaT^{-1} \in A$, $a \in A$, где $\widehat{T}\colon a \to TaT^{-1}$ есть автоморфизм алгебры A.

2. Множество B^0 конечных сумм $\sum a_k T^k$, $a_k \in A$, плотно по норме в B.

Тогда говорят, что алгебра B порождена алгеброй A и представлением T группы $\mathbb{Z}$, и обозначают $B = B(A, T)$. В случае, когда A и B есть C^*-алгебры, и представление T унитарно, обозначают $B = C^*(A, T)$. Приведенные аксиомы отражают важнейшие свойства функциональных операторов, поэтому элементы алгебры $B(A, T)$ называются *абстрактными функциональными операторами,* а элементы вида aT — *абстрактными операторами взвешенного сдвига.*

Далее, пусть $\xi = (E, M, p)$ — комплексное векторное расслоение над M размерности n, в каждом слое которого задано скалярное произведение, непрерывно зависящее от точки x. Непрерывное отображение $\beta : \xi \to \xi$ называется *линейным расширением* отображения $\alpha : M \to M$, если при отображении β слой $\xi(x)$ линейно отображается в слой $\xi(\alpha(x))$. Линейное расширение β называется *гиперболическим,* если существуют инвариантные относительно β непрерывные подрасслоения ξ^s и ξ^u, постоянные c_s, $c_u > 0$ и $0 < \gamma_s, \gamma_u < 1$, такие, что $\xi = \xi^s \oplus \xi^u$ и

$$||\beta^m(y)|| \leqslant c_s \gamma_s^m ||y||,\ y \in \xi^s,\ m = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

$$||\beta^m(y)|| \geqslant c_u \gamma_u^{-m} ||y||,\ y \in \xi^u,\ m = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

Подрасслоение ξ^s называют *сжимающимся,* ξ^u — *растягивающимся.*

Достаточно широко известен ряд теорем об эквивалентности обратимости операторов вида $I + aT$, $a \in A$, где T — оператор взвешенного сдвига в пространстве сечений $\Gamma(\xi)$, и гиперболичности соответствующего линейного расширения отображения α ([1], с.266).

Целью работы является получение аналогов таких теорем и их следствий для абстрактных функциональных операторов, в случае если A есть произвольная n-однородная C^*-алгебра. Прежде при построении ассоциированного линейного расширения β использовались два предположения: что $A \approx \mathrm{HOM}\ \xi$, и что автоморфизм $\tau = \widehat{T}$ задается с помощью некоторого линейного расширения θ, действующего на векторном расслоении ξ: $\tau(a) = \theta \circ a \circ \theta^{-1}$, $a \in A$. Эти предположения в общем случае не выполнены.

В работе предложена новая конструкция ассоциированного линейного расширения, применимая в случае абстрактных функциональных операторов.

Требуемое изменение конструкции подсказывает теорема Фелла, утверждающая, что для любой $n-$однородной C^*-алгебры A существует алгебраическое расслоение ξ_A над пространством M максимальных идеалов алгебры A, такое, что A изоморфна алгебре непрерывных сечений $\Gamma(\xi_A)$. Напомним, что *алгебраическим* расслоением над пространством M называется расслоение, у которого слоем является алгебра матриц $\mathbb{C}^{n\times n}$, а структурной группой — группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(n)$.

Пусть $I_{x_0} = \{u \in \Gamma(\xi_A) : u(x_0) = 0\}$ – максимальный идеал алгебры A. При автоморфизме $\widehat{T}$ идеал I_{x_0} перейдет в некий идеал I_{x_1}, тем самым порождая гомеоморфизм $\alpha : M \to M, I_{x_0} \to I_{x_1}$. Автоморфизм $\widehat{T}$ индуцирует отображение фактор-алгебр $\widehat{\theta} : A/I_x \to A/I_{\alpha(x)}$. Но $A/I_x \approx \mathbb{C}^{n\times n}$ – есть слой над точкой x, а $A/I_{\alpha(x)} \approx \mathbb{C}^{n\times n}$ – слой над точкой $\alpha(x)$.

Таким образом, определено ассоциированное линейное расширение β, действующее на алгебраическом расслоении ξ_A по формуле

$$\beta(x, y) = (\alpha(x), a(x)\widehat{\theta}(x, y)),\ x \in M, y \in \xi_A(x).$$

Теорема 1. *Пусть $B = C^*(A, T)$, A — n-однородная C^*-алгебра, отображение α действует на M топологически свободно. Элемент $b = I + aT$, $a \in A$, обратим тогда и только тогда, когда ассоциированное линейное расширение β, действующее на алгебраическом расслоении ξ_A, является гиперболическим.*

Литература

[1] A. Antonevich, A. Lebedev. Functional differential equations: I. C^*-theory. Longman Scientific and Technical, Harlow, 1994.

Вещественные четырехмерные кубики: классификация с точностью до деформаций

Финашин С.М. (Турция)
Ближневосточный технический университет
serge@metu.edu.tr

Четырехмерные кубические гиперповерхности тесно связаны с K3-поверхностями, что позволило (в совместой работе с В. Харламовым) классифицировать вещественные 4-мерные кубики и описать взаимное расположение их деформационных компонент.

Алгебраические методы оценки числа предельных циклов плоских векторных полей

Черкас Л. А. (Беларусь)
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
cherkas@inp.by
Гринь А. А. (Беларусь)
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
grin@grsu.by

Пусть на односвязном компакте $\Omega \subset R^2$ определено структурно устойчивое векторное поле $X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, $P, Q \in C^2(\Omega)$, имеющее единственную особую точку – антиседло A. Тогда существуют число $k < 0$ и функция $\Psi(x, y) \in C^2(\Omega)$ такие, что для $\forall(x, y) \in \Omega$ имеет место $D(\Psi) := k\Psi divX + X\Psi > 0$. При этом число предельных циклов поля X в области Ω равно b или $b-1$, где b – число овалов кривой $\Psi = 0$. Существование функции в виде $\Psi = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\Psi_j(x, y), C_j \in R$ равносильно неравенству $\max\limits_{|C_j|\leqslant 1} \min\limits_{(x,y)\in\Omega} \Phi(x, y, C) > 0$, где $\Phi(x, y, C) = D(\Psi) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j D(\Psi_j)$. Задача нахождения указанного максимина с помощью ее дискретного аналога сводиться к стандартной задаче линейного программирования [1]. Функции Ψ_j можно взять в виде многочленов, если область Ω небольшого размера, или сплайн-функций.

Для структурно устойчивого параметрического семейства векторных полей X_α, $\alpha \in \Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, Ω_α – выпуклый компакт, функцию Ψ можно найти, исходя из того, что если максимин положительный для m точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из Ω_α, то оно выполняется на симплексе с вершинами в этих точках. Предполагается, что X_α линейно зависит от α. Тогда нахождение функций Ψ для семейства X_α сводится к их нахождению на некоторой сетке точек $\alpha \in \Omega_\alpha$.

Для векторного поля системы Льенара $L = (y - F(x))\frac{\partial}{\partial x} - g(x)\frac{\partial}{\partial y}$ можно выбрать функцию $\Psi = \sum\limits_{i=1}^{n} \Psi_i(x)y^{n-i}$ так, что функция $D(\Psi)$ зависит только от x.

Пусть при изменении поворачивающего поле скалярного параметра α происходит рождение предельных циклов из двукратных или их слияние. Тогда существует разбиение Ω на кольцеобразные области типа вход-вход, выход-выход, вход-выход, что для каждой из областей первых двух типов применим предыдущий подход. В области Ω_0 вход-выход с единственной бифуркацией слияния двух предельных циклов в двукратный для ее обоснования используется [2]

Теорема *Пусть выполнены условия:*

1) существуют функкии $C_j(\alpha)$, $j = \overline{1, n+1}$, $\Psi = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\Psi_j(x, y)$, что $D(\Psi) + C_{n+1}(\alpha)H_2(x, y, \alpha) > 0$, $C_{n+1}(\alpha) \neq 0$, $(x, y) \in \Omega_0$, $\alpha \in I = [\alpha_0, \alpha_1]$, $H_2 = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{P_\alpha H_1}{H}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q_\alpha H_1}{H})$, $H_1 = divX_\alpha$, $H = P_\alpha^2 + Q_\alpha^2$;

2) при $\alpha = \alpha_0$ поле X_α имеет в кольцеобразной области Ω_0 два предельных цикла, при $\alpha = \alpha_1$ предельных циклов нет;

3) $\partial\Omega_0$ трансверсальна X_{α_0} и X_{α_1}.

Тогда векторное поле X_α имеет в области Ω_0 не более двух предельных циклов.

Второй метод применяется для векторного поля L, где $F(x)$,$g(x)$ – аналитические функции, $xg(x) > 0$, $F(0) = 0$. Векторное поле L заменой $u = (2G(x))^{1/2} signx$, $G(x) = \int_0^x g(p)dp$ сводится к $U = (y - \tilde{F}(u))\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial y}$, где $\tilde{F}(u) = F(\Psi(u))$, $\Psi(u)$ – функция, обратная функции $u(x)$. Подмечено, что в грубой ситуации число предельных циклов поля U не превышает числа положительных нулей функции $\tilde{F}(u)$, которое равно числу решений системы

$$F(x) = F(y),\ Q(x) = G(y),\ x < 0, y > 0. \tag{1}$$

Т.е. число решений системы (1) можно рассматривать как прогнозное число предельных циклов векторного поля L (или U). Этот подход рассмотрен для квадратичного поля X, когда P, Q – многочлены второй степени и для большого набора таких исследованных векторных полей прогнозное число не превышает трех. С помощью системы (1) также решена задача о прогнозном числе предельных циклов, рождающихся при возмущении квадратичного центра. Прогноз согласуется с ранее полученными результатами по этой задаче.

Литература

[1] Черкас Л.А., Гринь А.А. Алгебраические аспекты нахождения функции Дюлака для полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т.37. – N3, С.384 – 390.

[2] Гринь А.А., Черкас Л.А. Экстремумы функции Андронова–Хопфа полиномиальной системы Льенара // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т.41. – N1, С.50 – 60.

Гидродинамика на вращающейся сфере

Чупахин А. П. (Россия)
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
chupakhin@hydro.nsc.ru

В работе исследуются движения газа в атмосфере вращающейся планеты и жидкости в Мировом океане. Изучаются крупномасштабные движения сплошной среды, описываемые моделью мелкой воды на вращающейся сфере

$$
\begin{aligned}
&Dv = w^2\mathrm{ctg}\theta + r_0 w\cos\theta + (r_0/2)^2\sin\theta\cos\theta - f_0 h_\theta\ ,\\
&Dw = -vw\mathrm{ctg}\theta - r_0 v\cos\theta - f_0(\sin\theta)^{-1}h_\varphi\ ,\\
&Dh + (\sin\theta)^{-1}h(w_\varphi + (v\sin\theta)_\theta) = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $D = \partial_t + v\partial_\theta + (\sin\theta)^{-1}w\partial_\varphi$. Уравнения (1) записаны в неинерциальной, вращающейся вместе с планетой сферической системе координат: $0 < \theta < \pi$ — дополнение до широты, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ — долгота, v и w меридиональная и долготная компоненты скорости, $h > 0$ — глубина жидкости (высота атмосферы). Безразмерные параметры r_0 и f_0 связаны с числами Россби R_0 и Фруда F : $r_0 = R_0^{-1}, f_0 = F^{-2}$.

Для уравнений (1) получены следующие результаты.

1. Исследованы простые стационарные волны, в которых все функции зависят от широты θ. Для таких решений уравнения (1) проинтегрированы в конечном виде, доказано, что ключевым уравнением для анализа решения является дискриминантное уравнение

$$
h^3 - \left(1 - w^2\right)h^2 - \frac{v_0^2}{\sin^2\theta} = 0\ , \tag{2}
$$

где

$$
v = v_0(h\sin\theta)^{-1}\ , \quad w = w_0(\sin\theta)^{-1} + r_0\sin\theta\ . \tag{3}
$$

Возможны два типа таких решений, различающихся выпуклостью профиля $h = h(\theta)$ и геометрией линий тока. Одно из них является сверхкритическим (сверхзвуковым), второе — докритическим. Они описывают движенияе жидкости из источника на одном из полюсов планеты в сток, расположенный в другом полюсе. При увеличении угловой скорости вращения планеты область течения расщепляется на два отдельных пояса в северном и южном полушариях. Особенностями типа источника и стока в этих случаях могут быть и линии — параллели, на которых неограниченными становятся производные искомых функций. Решения (2), (3) моделируют истечения воздушных масс с полярных шапок планеты.

2. Исследовано возможное ветвление решений системы (1) для простейших случаев: состояния равновесия $v = w = 0, h_*(\theta) = h_0 + (r_0^2/8f_0)\sin^2\theta$ и волн Блиновой — Россби $w = w_0 \sin\theta, v = 0$. Доказано, что от данных решений ответвляются точные решения уравнений (1), имеющие константный произвол. Для отклонения от состояния равновесия это означает, что существуют нетривиальные решения системы (1), в которых $h = h_*(\theta), (v, w) \neq (0, 0)$. Построение таких решений сводится к анализу совместности переопределённой системы трёх уравнений для двух функций — компонент скорости v и w. Переопределённая система уравнений приведена в инволюцию, получены все условия совместности, найден произвол в решении. Функции v и w описываются аналитическими формулами — комбинациями эллиптических интегралов.

3. Исследовано распространение звуковых возмущений в атмосфере планеты в рамках модели (1). Система (1) является гиперболической, для неё проинтегрированы уравнения звуковых характеристик на состоянии равновесия (см. п. 2). Найдена точная формула для характеристического коноида в виде комбинации эллиптических интегралов.

Модель (1) описывает движения сплошной среды на сфере в целом. Этим она существенно отличается от обычно используемых моделей типа β-плоскости, в которых решение определено лишь в ограниченной по широте плоской полосе.

В работе получены точные решения уравнений гидродинамики на вращающейся сфере в целом, анализируются их свойства и наличие особенностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00080, СО РАН, интеграционный поект № 2.15 и Программы поддержки ведущих научных школ, НШ-5245.2006.1.

Случаи полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил

Шамолин М. В. (Россия)
МГУ им. М. В. Ломоносова
shamolin@imec.msu.ru

Как было установлено в [1], [2], [3], [4] структура динамических уравнений движения свободного трехмерного твердого тела при наличии следящей силы на $so(3) \times R^3$ при определенных условиях сохраняется при переносе динамических свойств на случай большей размерности. Настоящая работа посвящена изучению движения четырехмерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил сопротивления с так называемой переменной диссипацией [1], [6].

Предполагается что все взаимодействие (четырехмерного) твердого тела со средой, заполняющей неограниченное четырехмерное пространство, сосредоточено на той части гладкой (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара K^3. При этом угловая скорость движения такого тела — элемент алгебры $so(4)$, а скорость центра масс — элемент R^4.

Если оператор инерции в декартовой системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом (ось Dx_1 направлена вдоль оси динамической симметрии, а декартова система $Dx_2x_3x_4$ связана с трехмерным шаром), имеет диагональный вид

$$diag\{I_1, I_2, I_3, I_4\},\ I_2 = I_3 = I_4,\ \Omega \in so(4)$$

— матрица угловой скорости твердого тела, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид [1], [2], [3]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M,$$

где $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$,
$\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2,\ \ldots,\ \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$,
M – момент внешних сил, действующих на тело в R^4, спроектированный на $so(4)$), $[\ ,\ ]$ – коммутатор в $so(4)$.

Поле сил определяем по аналогии с полем, используемым при моделировании воздействия сопротивляющейся среды на твердое тело в условиях струйного обтекания [1], [5], [6], [7].

В более ранних работах в основном рассматривались такие движения четырехмерного (многомерного) тела, когда момент суммарной силы, действующей на тело, тождественно равен нулю. Данная работа принадлежит одному из современных направлений в геометрии и механике, развиваемое автором, в исследовании уравнений движения твердого тела на $so(4) \times R^4$ (когда момент внешних сил не равен тождественно нулю и, более того, неконсервативен).

При некоторых условиях (наличие циклических интегралов вида $\omega_1 = \omega_1^0 = \omega_2 = \omega_2^0 = \omega_4 = \omega_4^0 = 0$, а также неинтегрируемой связи $v = const$) система динамических уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_3 + \sigma n_0^2 \sin\alpha,\ \dot{z}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - z^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \dot{z} = zz_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$\dot{z_*} = \sqrt{1+z_*^2}\, z \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta_1,\ \dot{\beta}_1 = \frac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}} \frac{\cos\alpha}{\sin\beta_1},$$
$$\dot{\beta}_2 = -z_1(z, z_*) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1},$$

где $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = \frac{z_2}{z_1}$, $n_0^2 = \frac{AB}{I_2}$, $A, B, \sigma > 0$ (постоянные характеризующие момент воздействия среды на твердое тело), $z_1 = \omega_3 \cos\beta_2 + \omega_5 \sin\beta_2$, $z_2 = -\omega_3 \sin\beta_2 \cos\beta_1 + \omega_5 \cos\beta_2 \cos\beta_1 + \omega_6 \sin\beta_1$, $z_3 = \omega_3 \sin\beta_2 \sin\beta_1 - \omega_5 \cos\beta_2 \sin\beta_1 + \omega_6 \cos\beta_1$, $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты, связанные с шаром K^3, $\mathbf{v}$ — скорость центра шара K^3 относительно среды.

Приведенная выше система шестого порядка в указанных координатах распалась, соответственно, на независимую систему третьего порядка, независимую систему второго порядка (конечно, после замены в ней независимого переменного), а также одно присоединенное уравнение.

Теорема *Рассматриваемая система шестого порядка обладает полным набором трансцендентных (в смысле комплексного анализа) первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Полученная методика интегрирования рассматриваемых динамических систем может быть распространена и на пространство $so(n) \times R^n$ произвольного динамически симметричного n-мерного твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05–08–01378–а и 05–01–00401–а).

Литература

[1] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд–во "Экзамен 2007. — 352 с.

[2] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. – М.: Факториал, 1995. – 447 с.

[3] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. **29**. – С. 3–80.

[4] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. – 2000. – Т. **375**. – No. 3. – С. 343–346.

[5] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: МГУ, 1986. – 86 с.

[6] Shamolin M. V., New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. **114**, No. 1, 2003, p.p. 919-975.

[7] Shamolin M. V., Structural Stability in 3D Dynamics of a Rigid. In: CD-Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17-21, 1999; Buffalo, NY, 1999, 6 p.

Алгебры операторов Лакса и их центральные расширения

Шейнман О. К. (Россия)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Независимый московский университет
sheinman@mi.ras.ru

Алгебры операторов Лакса – новый класс алгебр токов на римановых поверхностях, возникший вслед за аффинными алгебрами Каца–Муди и алгебрами Кричевера–Новикова. Каждая такая алгебра отвечает римановой поверхности и голоморфному векторному расслоению на ней. Вводятся ортогональные и симплектические аналоги операторов Лакса и соответствующие алгебры токов. Изучены почти градуированная структура и локальные центральные расширения этих алгебр.

Перечисленное является результатом совместной работы автора с И. М. Кричевером и М. Шлихенмайером.

Общие B-гиперсингулярные интегралы

Шишкина Э. Л. (Россия)
Воронежская государственная технологическая академия
ilina_dico@mail.ru

Будут представлены теоремы об обращении интегралов типа B-потенциалов Рисса общими B-гиперсингулярными интегралами.

Об особенностях перехода к детерминированному хаосу в некоторых гидродинамических системах

Щвец А. Ю. (Украина)
НТУУ “Киевский политехнический институт”
alex.shvets@bigmir.net

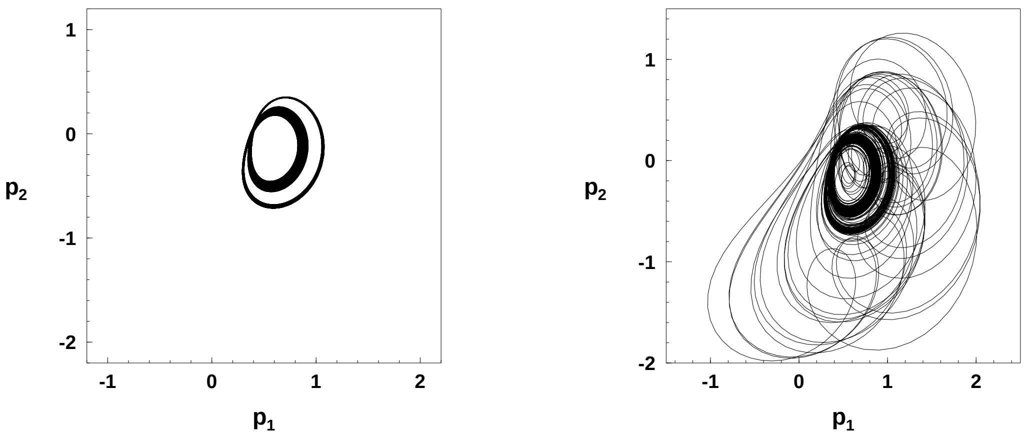
При изучении возникновения детерминированного хаоса в динамических системах одним из самых интересных является вопрос о сценариях перехода от одного типа установившихся режимов к другому. К настоящему времени обнаружено и описано большое количество типов хаотических аттракторов в динамических системах самой разной природы. Однако число известных сценариев перехода между установившимися режимами разных типов остается сравнительно небольшим. Поэтому обнаружение новых сценариев перехода к хаосу является интересной и актуальной научной проблемой нелинейной динамики.

Настоящая работа посвящена изучению свойств установившихся, в том числе и хаотических, режимов взаимодействия колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрических жестких баках и процесса вращения вала электродвигателя ограниченной мощности, возбуждающего пространственные колебания бака. Рассматриваемая система является детерминированной динамической системой с ограниченным возбуждением. Существование хаотических режимов при ограниченном возбуждении бака впервые было доказано в работе [1]. Однако в этой работе доказательство существования таких режимов было проведено только для одного частного случая колебаний свободной поверхности жидкости. Появление хаотических режимов в общем случае пространственных колебаний свободной поверхности установлено в работе [2]. Разнообразие возможных типов хаотических аттракторов и сценариев перехода от регулярных режимов к хаотическим изучалось в работе [3].

В пространстве параметров рассматриваемой системы обнаружен новый сценарий перехода типа "хаос–хаос". Этот сценарий относится к типу переходов к хаосу через перемежаемость. Он является обобщением известного сценария перехода от предельного цикла к хаосу через перемежаемость по Помо–Манневиллю. При новом сценарии роль исчезающего предельного цикла сценариев Помо–Манневилля играет исчезающий, при бифуркации, хаотический аттрактор. Ламинарной фазой обнаруженной перемежаемости являются хаотические движения траекторий, возникающего нового аттрактора, в окрестности траекторий исчезающего хаотического аттрактора. Турбулентной фазой являются непредсказуемые наперед уходы траекторий в отдаленные области фазового пространства.

Проведено детальное исследование установившихся хаотических режимов системы до и после точки бифуркации. Построены и проанализированы фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, распределения спектральной плотности и инвариантной меры в обнаруженном переходе "хаос-хаос".

На рисунках приведены фазовые портреты проекций хаотических аттракторов иллюстрирующие вышеупомянутую перемежаемость “хаос–хаос”.



Литература

[1] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярные и хаотические поверхностные волны в жидкости при ограниченном возбуждении колебаний цилиндрического бака // Прикл. мех.- 1990.-Т. 26, N8.-С. 85–93.

[2] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids &Structures.- 1994.-V.8, N1.-P.1-18.

[3] Швец А.Ю. Сценарии переходов “порядок–хаос” при резонансных колебаниях жидкости в цилиндрических баках // Сб. трудов Института математики НАН Украины.–2006.–Т.3, N1.–С. 216–249.

Singular curves and invariants of geometric structures

Agrachev A. (Russia, Italy)
Steklov Mathematical Institute
SISSA
agrachev@sissa.it

Given a submanifold V of the tangnet bundle to a smooth manifold M, we consider "admissible curves" on M whose velocities belong to V. Among examples are parametrized by the length curves on a Riemannian manifold and integral curves of a vector distribution. The boundary map sends a curve into its endpoints. "Singular curves" are critical points of the boundary map restricted to the space of admissible curves. They give nice and efficient tools for the investigation and classification of many intersting geometric structures.

Projective geometric theory of differential equations: linearization criterion

Aminova A. V. (Russia)
Kazan State University
asya.aminova@ksu.ru
Aminov N. A.-M. (Russia)
Kazan State Technical University
asa@ksu.ru

While developing the theory of spaces with a projective connection, E. Cartan stressed persistently its importance for the study of differential equations (see, for example, [1, c. 57]). The methods of differential geometry, in particular, the methods of Cartan's theory provide tools for developing a systematic geometric approach to defining and studying point and non-point symmetries of large classes of ordinary differential equations and partial differential equations and to obtaining their solutions.

Devoted to the fundamentals of this approach are papers [2-5] where the group properties of the equations of geodesics on an affine or a pseudo-Riemannian manifold M^n are considered, in particular, when these are written as a system of second-order differential equations (resolved with respect to the second derivatives) with third-degree polynomials in the derivatives of the unknown functions on the right-hand sides. Each point symmetry of such systems is proved to be a projective transformation. A connection between projective transformations in pseudo-Riemannian manifold M^n and symmetries of Hamiltonian systems and Lie–Bäcklund transformations of Hamilton - Jacobi equations with quadratic Hamiltonians is discovered. The dimension of the maximal symmetry group for a system of n second-order ordinary differential equations is found, and this group is proved to be the projective group; this result is an extension of a well-known theorem of Lie relating to $n = 1$. In [6-7] the group properties of systems $\mathcal{S}$ of second-order differential equations resolved with respect to the second derivatives and with the right-hand sides cubic in the first derivatives of the unknown functions are studied. No preliminary assumptions are made on the existence of a geometric structure (Riemannian, affine and so on) in the space of dependent and independent variables of the system. We show that certain combinations of the coefficients of the system are transformed as the components of a projective connection. It is remarkable that every projective connection on n-dimensional manifold M can be obtained in this way and every differential system $\mathcal{S}$ defines an (associated) projective connection on M. In other words, the theory of systems $\mathcal{S}$ of differential equations is the theory of projective connections. The notion of equivalent differential systems is introduced and necessary and sufficient conditions are found for a system $\mathcal{S}$ to be reducible by a change of variables to a system whose integral curves are straight lines. Symmetry group of differential system $\mathcal{S}$ is proved to be a group of projective transformations of dimension $r \leqslant n^2 + 2n$ in n-dimensional space with associated projective connection.

In the frames of developed projective geometric theory of differential equations linearization criterion for general system of second-order differential equations: $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$ ($\vec{x} \in \Re^N$), is found, that is, necessary and sufficient conditions are found for a system to be reducible by a change of variables to a system whose integral curves are straight lines and are expressed by n linear parametric equations or $n-1$ linear equations with constant coefficients. For $n = 2$ this implies the linearization conditions deduced by Tresse (1894) for the second-order differential equation. As an application a classification is given of linearizable systems of two second-order differential equations admitting four-dimensional solvable symmetry groups of Lie-Petrov type VI_1. For each type explicit forms of equations of a system together with basic vector fields and structure equations of the corresponding symmetry Lie algebra are obtained as well as linearization conditions and linearizing changes are stated.

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Researches (grant no. 06-01-00765).

References

[1] Arnold V. I. Dopolnitelnye glavy teorii obyknovennykh differencial-nykh uravnenii. Moscow: Nauka. 1978.

[2] Aminova A.V. Dep. VINITI. 1706-,91. 1991.

[3] Aminova A. V. Izv. vuz. Mat. 1994. 2, 3-11.

[4] Aminova A.V. Sbornik: Mathematics. 1995. V. 186, 12, 1711-1726.

[5] Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Tensor, N. S. 2000. V. 62, 65-86.

[6] Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Izv. vuz. Mat. 2005. 6, 12-27.

[7] Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Sbornik: Mathematics. 2006. V. 197, 7, 951-975.

[8] Aminova A. V. Uspekhi Mat. Nauk. V. 48 (1993), 2, 107-164; V. 50 (1995), 1, 69-142; Russian Math. Surveys **48**: 2 (1993); **50**: 1 (1995).

[9] Aminova A. V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. Moscow: Yanus-K. 2003.

Enumerating stair-shaped young tableaux

Baryshnikov Yuliy (USA)
Bell Laboratories
ymb@research.bell-labs.com

Up-down permutations – permutations where increases and decreases alternate – feature prominently in Arnold's work, see e.g. [1, 2]. One can view these permutations as standard Young tableaux with stair-like Young diagram shapes.

The problem of enumerations of standard skew Young tableaux of given shape is rather nontrivial (existing explicit formulae are unwieldy and do not lend themselves readily to asymptotic analysis). In this work we count Young tableaux filling a natural family of *stair-like* Young diagrams whose north-western and south-eastern boundaries are parallel to the bisector of the first quadrant (we use the orientation where the entries of the tableau increase left-to-right and top-to-bottom). We will encode such Young tableaux by the vector of column heights; examples of Young diagrams and their encodings are shown below:

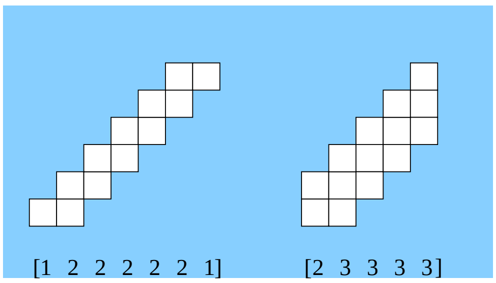


Figure 1: Stair-like Young diagrams and their height vectors.

To find the number of Young tableaux with stair-like shapes we adopt a variant of the *transfer operator* method generalizing the approach of [3]; it leads to a problem of diagonalization of the certain integral operator.

Thus, for the shapes with typical columns being of height $2m$, the operator acts on the subspace of even totally antisymmetric functions in $L^2([-1,1]^m)$ as

$$(Sf)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \tag{1}$$

$$= \int_0^{1-x_m} \int_0^{1-x_{m-1}} \cdots \int_0^{1-x_1} f(y_1, \ldots, y_m) dy_m dy_{m-1} \cdots dy_1,$$

The operator S is diagonal in the orthonormal basis

$$f_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 2^{m/2} \det \left(\cos \frac{\pi k_j x_l}{2} \right)_{l,j=1\ldots m} \tag{2}$$

with the eigenvalues $\lambda_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \dfrac{2^m(-1)^{\sum_j (k_j-1)/2}}{\pi^m \prod_j k_j}$.

Similar approach works also for shapes with odd typical column heights; here the eigenfunction are the determinants

$$\det \left(\sin(\pi k_j x_l)\right)_{k_1<k_2<\cdots<k_m},$$

without restrictions on the parity of k's.

These general results lead to dozens of theorems on enumeration of stair-like Young tableaux for small values of column heights. For example, for the shape with the vector $[44\ldots4]$ (n columns altogether), the number of Young tableaux is

$$N_{[4^n]} = (4n)! \left(\left(\frac{E_{2n}}{(2n)!} \right)^2 - \frac{E_{2n-2}}{(2n-2)!} \frac{E_{2n+2}}{(2n+2)!} \right),$$

where E_{2n} are the Euler numbers, given by $\sec(z) = \sum \dfrac{E_{2n} z^{2n}}{(2n)!}$.

This and many others of the resulting identities beg for a combinatorial explanation.

This is joint work with Dan Romik, Hebrew University.

References

[1] Arnold V. I., Bernoulli–Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics // Duke Math. J. – 1991. 63, no. 2, pp. 537–555.

[2] Arnold V. I., Snake calculus and the combinatorics of the Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups.// Uspekhi Mat. Nauk – 1992, v. 47, no. 1(283), 3–45.

[3] Elkies N., On the Sums $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(4k+1)^{-n}$.// Amer. Math. Monthly, – 2003. Vol. 110, N.7, pp. 561–573.

Finite rank approximations of chaotic dynamical systems with neutral singularities

Blank M. L. (Russia)
Russian Academy of Sci., Inst. for Information Transm. Problems
blank@iitp.ru

In 1960 S. Ulam [1] has formulated a hypothesis about the possibility of an approximation of an action of a chaotic dynamical system by means of a sequence of finite state Markov chains and proposed the simplest scheme which can be described in modern terms as follows. Let T^* be a *transfer-operator* corresponding to the dynamical system (T, X), i.e. $T^*\mu(A) := \mu(T^{-1}A)$ for any Borel set $A \subseteq X$ and a probabilistic measure μ. Let $\Delta := \{\Delta_i\}$ be a finite measurable partition of X with the diameter δ. Consider an operator acting on probabilistic measures (generalized functions): $Q_\Delta^*\mu(A) := \sum\limits_i \dfrac{m(A \cap \Delta_i)}{m(\Delta_i)}\,\mu(\Delta_i)$. Then the Ulam's approximation can be written as a superposition of the operators $Q_\Delta^* T^*$ and his hypothesis says that for a "good" enough map and a "good" enough partition Δ statistical properties of the original dynamical system can be obtained from the limit properties of the operators $Q_\Delta^* T^*$ when the partition diameter vanishes. Observe that numerically the complete spectral analysis of the finite stochastic matrix corresponding to $Q_\Delta^* T^*$ is a routine procedure.

It turns out that for a broad class of dynamical systems having some hyperbolicity properties (piecewise expanding maps, Anosov torus diffeomorphisms, random maps) one might show that both the corresponding transfer-operator and its perturbation are quasi-compact, which leads to the direct operator analysis of the spectrum stability with respect to perturbations generated by the operator Q_Δ^*.

Strictly speaking even for a very "good" hyperbolic dynamical system some additional assumptions are needed to prove the hypothesis for the complete spectrum. Surprisingly, a similar statement about the leading eigenfunction turns out to be extremely robust. In fact, the only known counterexample [2] given by the map:

$$Tx := \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{if } 0 \leqslant x < \frac{5}{12} \\ -2x + 1 & \text{if } \frac{5}{12} \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

is not only discontinuous but this discontinuity occurs at a periodic turning point (compare to instability results about general random perturbations [3]).

Up to now there were no mathematical results about the nonhyperbolic situation and our aim is to show that despite the conventional technics mentioned above no longer works in this case, yet the stability of the leading eigenfunction can be proven. Consider a family of expanding maps with neutral singularities. A typical example of this type is the so called Manneville-Pomeau map $T_\alpha x := x + x^\alpha(\mathrm{mod}1)$ from the unit interval $X := [0, 1]$ into itself with $\alpha > 1$. It is known that the map T_α possesses the only one SRB measure μ_α which is absolutely continuous (but has an unbounded density) if $1 < \alpha < 2$, and is the Dirac measure at the origin $1^*_{\{0\}}$ if $\alpha > 2$. The following result demonstrates that the Ulam scheme works correctly for this nonhyperbolic map.

Theorem. For any $\alpha \geqslant 1$ and small enough $0 < \delta \ll 1$ the Markov chain generated by the transfer operator $Q^*_\Delta T^*_\alpha$ is uniquely ergodic and its unique invariant distribution μ_Δ satisfies the relations: (a) $\mu_\Delta(\Delta_1) \leqslant C\delta^{2-\alpha} \quad \forall \alpha \geqslant 1$, (b) $\mu_\Delta(\Delta_1)/\delta \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} \infty \quad \forall \alpha > 1$, (c) $\mu_\Delta \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} 1^*_{\{0\}} \quad \forall \alpha > 2$. Here Δ_1 is the element of Δ containing the origin.

To prove this result we developed a completely new approach based on the analysis of the action of the corresponding transfer operators on "monotonic measures" μ defined by the property that $\mu(A) \geqslant \mu((A+x) \cap X)$ for any Borel set $A \subset X$ and $x \in X$.

We shall discuss also the generalization of the above result for a much more general class of piecewise convex maps with neutral singularities.

References

[1] Ulam S. Problems in modern mathematics, Interscience Publishers, New York, 1960.

[2] Blank M. Perron-Frobenius spectrum for random maps and its approximation. // Moscow Math J., 1:3(2001), 315–344.

[3] Blank M. Stability and localization in chaotic dynamics, MCCME, Moscow, 2001.

Caustics of interior scattering

Bogaevsky I. A. (Russia)
Moscow State University
bogaevsk@mccme.ru

The geometric optics of linear short waves is described by a Fresnel hypersurface, which is defined by an eikonal equation and situated in a contact space. A Fresnel hypersurface can have conical singularities, which are locally diffeomorphic to the product of the two-dimensional cone and a real vector space. Its Legendre submanifolds describing the propagation of wave fronts can have singularities as well because the Fresnel hypersurface itself is not smooth. V.I.Arnold has discovered that there are two types of typical conical singularities of a generic Fresnel hypersurface up to contact diffeomorphisms - elliptic and hyperbolic. Besides, he has found a normal form of a typical Legendre submanifold in a neighborhood of a hyperbolic conical point of the Fresnel hypersurface. We describe all typical caustics of this Legendre submanifold in three-dimensional space.

Symbolic dynamics of almost collision orbits of the elliptic 3 body problem

Bolotin Sergey (Russia)
Steklov Mathematical Institute, Moscow
bolotin@mi.ras.ru

Suppose Sun of mass 1 and Jupiter of mass μ move with period 2π along ellipses with eccentricity ϵ, and an Asteroid of negligible mass moves in the gravitational field of Sun and Jupiter. For $\mu = 0$ Jupiter disappears and we obtain Kepler's problem. We prove the existence of chaotic almost collision orbits of the Asteroid which, as $\mu \to 0$, shadow chains of collision orbits of Kepler's problem. Periodic orbits of this type were first considered by Poincaré for the general 3 body problem.

One of the results is as follows. Let G be the angular momentum of the Asteroid and E the energy. For $\epsilon = 0$ Jacobi's constant $J = E - G$ is a first integral. Let $\Omega = \{(g, h) : g^2/2 - g - 1 < h < -g\}$ be the set of (g, h) such that Kepler's orbit with $G = g$ and $J = h$ is an ellipse crossing the unit circle which is Jupiter's orbit for $\epsilon = \mu = 0$.

Theorem 1. *Let $\rho > 0$. There exist $C, \epsilon_0, \delta > 0$ such that for any $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, any $\mu \in (0, \delta\epsilon)$ and any sequence $(g_i, h_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ in Ω, there exists an almost collision orbit of the elliptic 3 body problem and a sequence $(t_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ such that $0 < t_i - t_{i-1} < C\epsilon^{-1}$ and $|J(t_i) - h_i| + |G(t_i) - g_i| < \rho$ for all i.*

Thus the angular momentum and Jacobi's constant wander "randomly" in Ω. In fact J changes much slower than G. In contrast with regular perturbations of an integrable system for which "diffusion speed" is exponentially slow, the rate of change of J is of order ϵ.

The proof is based on a reduction to hyperbolic dynamics of skew product of almost integrable symplectic maps f_k of the annuli:

$$f_k(t, h) = (t + \rho_k(h) + O(\epsilon), h + O(\epsilon)), \qquad t \bmod 2\pi, \quad a_k < h < b_k.$$

Abelian functions and singularity theory

Buchstaber Victor M. (Russia)
Steklov Mathematical Institute, RAS

Theory of Abelian functions was a central topic of the 19th century mathematics. In mid-seventies of the last century a new wave arose of investigation in this field in response to the discovery that Abelian functions provide solutions of a number of challenging problems of modern Theoretical and Mathematical Physics.

In a cycle of our joint papers with V. Enolskii and D. Leykin we have developed a theory of multivariate sigma-function, an analogue of the classic Weierstrass sigma-function.

A sigma-function is defined on a cover of U , where U is the space of a bundle $p\colon U \to B$ defined by a family of plane algebraic curves of fixed genus. The base B of the bundle is the space of the family parameters and a fiber J_b over $b \in B$ is the Jacobi variety of the curve with the parameters b. A second logarithmic derivative of the sigma-function along the fiber is an Abelian function on J_b.

Thus, one can generate a ring F of fiber-wise Abelian functions on U. The problem to find derivations of the ring F along the base B is a reformulation of the classic problem of differentiation of Abelian functions over parameters. Its solution is relevant to a number of topical applications.

The talk presents a solution of this problem recently found by the speaker and D. Leykin.

A precise modern formulation of the problem involves the language of Differential Geometry. We obtained explicit expressions for the generators of the module of differentiations of a ring of Abelian functions. The families of curves, which we work with, are special deformations of the singularities $y^n - x^s$, where $\gcd(n, s) = 1$. The choice of this type of families allows us to use methods and results of Singularity Theory, especially Arnold's convolution of invariants and the theorem of Zakalyukin on holomorphic vector fields tangent to the discriminant variety.

References

[1] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications*, Reviews in Mathematics

and Math. Physics, I. M. Krichever, S. P. Novikov Editors, v. 10, part 2, Gordon and Breach, London, 1997, 3–120.

[2] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, *Polynomial Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. 36 (2002), no. 4, 267–280.

[3] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, *The heat equations in a nonholonomic frame*, Funct. Anal. Appl. 38 (2004), no. 2, 88–101.

[4] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, *Addition laws on Jacobian varieties of plane algebraic curves*, Proc. Steklov Math. Inst. 251 (2005), 49–120.

[5] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, *Differentiation of Abelian functions over its parameters*, Russian Math. Surveys, v. 62, Issue 4, 2007.

Poincaré series and the monodromy zeta functions

Campillo Antonio (Spain)
Valladolid University

Poincaré series associated to multi-index filtrations are studied in joint work with F. Delgado and S. Gussein-Zadé. One gets that for some natural filtrations associated to the inner structure of several singularity types, the Poincaré series provides direct information on the geometry or the topology of the singularity. For quasi-homogeneous singularities W. Ebeling and S. Gussein-Zadé have shown that the Poincaré series associated to the weight filtration is related to the monodromy zeta function. This leads to consider also multi-index filtrations for given embedded singularities, and their associated Poincaré series, which is done in current work by A. Lemahieu. Thus natural Poincaré series for singularities, both non embedded and embedded ones, can be studied. We review those results and show how any of those Poincaré series has significant information on the geometry or topology of the singularities, and compare such information in several cases. In particular, relations with monodromy zeta functions are emphasized.

On the index of the subgroup generated by the Heegner divisors

Castaño-Bernard C. (Italy)
ICTP (Trieste)
ccastano@ictp.it

Let E be an elliptic curve defined over $\mathbb{Q}$ and assume E has rank one. So there is a non-trivial morphism $p : X_0^+(N) \to E$ defined over $\mathbb{Q}$ such that $i\infty \mapsto O_E \in E$, where $X_0^+(N)$ is the quotient of $X_0(N)$ by the Fricke involution w_N, and N is the conductor of E. Denote by $J_0^+(N)$ the Jacobian of $X_0^+(N)$ and let P be a generator of the subgroup generated by the set of $p_*(y_D^+) \in E(\mathbb{Q})$, where $y_D^+ \in J_0^+(N)(\mathbb{Q})$ runs through all Heegner divisors as in [2]. (Cf. [1].) This talk is about a conjectural relation between the index $[E(\mathbb{Q}) : \mathbb{Z}P]$ and the real locus $X_0^+(N)(\mathbb{R})$ of the quotient curve $X_0^+(N)$ suggested by new numerical evidence.

References

[1] Borcherds, R.E., The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, Duke Math. J., 97 (1999), no. 2, p. 219–233.

[2] Gross, B.H., Kohnen, W., and Zagier, D.B., Heegner points and derivatives of L-series. II, Math. Ann. 278 (1987), no. 1–4, p. 497–562.

Singularities of dynamical systems: a catastrophic viewpoint

Chaperon M. (France)
Université Paris 7
chaperon@math.jussieu.fr

The idea of stratifying function spaces is not as familiar in dynamics as in differential topology or in the theory of singularities of smooth maps.

The aim of this talk is to present in that framework various results, some of which are quite recent, and various questions, some of which must be very hard and might be ill-posed.

An aspect of the subject is that the birth of invariant circles in the "Hopf" bifurcation generalizes to generic families in dimension $2n$, depending on at least n parameters, as the birth not only of invariant n–tori [1] but also of various other higher dimensional compact invariant manifolds [2,3,4,5], the largest of which are $(2n-1)$–spheres. Their study has to do with Lotka-Volterra systems, on which it brings some apparently new information [3].

References

[1] Broer H., Huitema G.B., Sevryuk M.B. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems. Order amidst chaos.
Lecture Notes in Mathematics 1645 (1997), Springer-Verlag.

[2] Chaperon M., Kammerer-Colin de Verdière M., López de Medrano S. More compact invariant manifolds appearing in the non-linear coupling of oscillators.
C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 342 (2006), 301–305.

[3] Chaperon M., López de Medrano S. On generalized Hopf bifurcations and the regularity of carrying simplices.
To appear.

[4] Kammerer-Colin de Verdière M. Stable products of spheres in the non-linear coupling of oscillators or quasi-periodic motions.
C. R. Acad. Sc. Paris 339 (2004), Groupe 1, 625–629.

[5] Kammerer-Colin de Verdière M. Bifurcations de variétés invariantes.
Thèse, Université de Bourgogne, 8 décembre 2006.

Arnold multiplicity and birational automorphisms

Cheltsov I. (Russia)
University of Edinburgh
cheltsov@yahoo.com

Arnold multiplicity is a local invariant of a holomorphic function defined by the square-integrability of fractional powers of the function. In one complex variable, it agrees with the ordinary multiplicity. But for holomorphic functions of several complex variables, Arnold multiplicity is a more subtle invariant which has connections with many problems in various areas of mathematics. Arnold multiplicity can be defined also for holomorphic sections of line bundles on complex manifolds. We will discuss relations between this local invariant of holomorphic sections of line bundles and global birational geometry of Fano varieties.

Linking and causality in globally hyperbolic spacetimes[1]

Chernov V. V. (USA)
Dartmouth College
Vladimir.Chernov@dartmouth.edu

We construct the invariant *alk* that is the generalization of the linking number to the case of nonzero homologous submanifolds and apply it to the study of causality in globally hyperbolic spacetimes (X, g). The space N of null geodesics in (X, g) is identified with the spherical cotangent bundle ST^*M of a Cauchy surface M. All the null geodesics passing through $x \in X$ form a sky $S_x \subset N = ST^*M$ of x.

Low observed that if the link $(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y)$ is nontrivial, then $x, y \in X$ are causally related. We show that in many cases $(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y) \neq 0$ if and only if $x, y \in X$ are causally related. We show that x, y in a nonrefocussing (X, g) are causally unrelated iff $(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y)$ can be deformed to a pair of S^{m-1}-fibers of $ST^*M \to M$ by an isotopy through skies. Low proved that if $(\mathfrak{S}, g)$ is refocussing, then M is a closed manifolds. We prove that the universal cover of M is also a closed manifold.

[1]based on a joint work with Yuli Rudyak

Trigonometric sums in the number theory and analysis

Chubarikov V. N. (Russia)
Lomonosov Moscow State University

This talk is devoted to trigonometric sums in the number theory and analysis, in particular, to the P. L. Chebyshev moment method which is known in the theory of probabilities.

From one side, this method permit to describe some properties of a function on its moments. Often the computation of moments is a simple problem of analysis. From an other side, if the function is large, it is large on the set of the positive measure. These arguments often give the solution of a problem.

I. M. Vinogradov defined the place of analysis in the number theory as follows. He wrote: "Analysis makes it possible to extend considerably the range of problems of the number theory and provides for a more rapid development of this science. I also want to point out one more useful feature of the analytic methods in the number theory. While solving new difficult problems, analysis itsef develops and gets more perfect. Dirichlet's series and the theory of $\zeta(s)$ function can serve as examples as well as some properties of Bessel's functions of a complex variable (for instance, the theorems of Lindelöf, Phragmen, Mellin), discontinuous sums and integrals etc. Thus, the application of the analytic method to the number theory enriches the science with new valuable achievements and, at the same time, develops and perfects the analysis itself".

We will discuss:

1. The I. M. Vinogradov Mean Value Theorem
2. The Moment Problem for Multiple Trigonometric Sums
3. A upper bound for Weyl sums
4. Multiple Trigonometric Sums on Primes
5. The distribution of values of short trigonometric sums
6. Estimates of trigonometric integrals and complete rational trigonometric sums
7. Some Unsolved Problems.

Vassiliev invriants that do not distinguish mutant knots

Chmutov S. V. (USA)
Ohio State University
chmutov@math.ohio-state.edu

The purpose of this presentation is to describe all Vassiliev invariants that do not distinguish mutant knots in terms of their weight systems. Namely, a (canonical) Vassiliev invariant does not distinguish mutant knots if and only if its weight system depends on the intersection graph of a chord diagram only.

Joint work with Sergei Lando.

Local invariants in real geometry and regularity conditions

Comte Georges (France)
University of Nice-Sophia Antipolis
comte@math.unice.fr

For germs of subanalytic sets, we define two finite sequences of new numerical invariants. The first one is obtained by localizing the classical Lipschitz-Killing curvatures, the second one is the real analogue of the evanescent characteristics introduced by M. Kashiwara. We show that each invariant of one sequence is a linear combination of the invariants of the other sequence. We then connect our invariants to the geometry of the discriminants of all dimension. Finally we prove that these invariants are continuous along Verdier strata of a closed subanalytic (actually definable) set.

Limit cycle bifurcation in thermohaline convection box-model

Davydov A. A. (Russia, Austria)
Vladimir State University
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)
davydov@iiasa.ac.at
Melnikov N. B. (Austria, Russia)
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)
Central Economics and Mathematics Institute
of the Russian Academy of Sciences
Lomonosov Moscow State University
melnikov@iiasa.ac.at

The thermohaline convection box-model proposed by Welander [1] can be written as

$$\dot{x} = 1 - x - q(z)x \qquad \dot{y} = \delta(1 - y) - q(z)y \tag{1}$$

where $z = -x + ry$, $0 < \delta < 1$, and $1 < r$. Self-sustained oscillations numerically found in this model [1] were used to analyze and explain interdecadal ocean oscillations in general circulation models described by PDEs [2]. Here we prove existence of the limit cycle in the system (1) for a wide class of nonnegative nondecreasing transfer functions q which represent turbulent fluxes. First, we note that for any continuous transfer function the system (1) has at least one steady state, and all its steady states belong to the square $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, which is an invariant set of the system (1).

Theorem 1 [3,4] *Let the family $q = Q(., \lambda)$, $\lambda > 0$, of continuous transfer functions converge point-wise outside zero as $\lambda \to 0+$ to the function $\chi_\sigma, \sigma > 0$, such that $\chi_\sigma(z) = 0$, $z < 0$, and $\chi_\sigma(z) = \sigma$, $z \geqslant 0$. Then for sufficiently small λ there exists a unique steady state $(\hat{x}, \hat{y})$ in the system (1). If additionally this function is differentiable at the point $\hat{z}$, $\hat{z} = -\hat{x} + r\hat{y}$, and the inequality $q'(\hat{z})\hat{z} < -1 - \delta - 2q(\hat{z})$ is true, then this steady state is a hyperbolic repeller.*

Poincare-Bendixson theorem yields the following

Corollary [3,4] *Let the function q satisfy the assumptions of Theorem 1, so that there is a unique steady state $(\hat{x}, \hat{y})$ which is a hyperbolic repeller.*

Then the system (1) has a limit cycle inside the square Π *that encloses the steady state* $(\hat{x}, \hat{y})$.

Consider the flip-flop model, i. e. the transfer function has a jump at zero. Solutions to the system (1) with $q = \chi_\sigma$ are understood in the Filippov sense.

Theorem 2 [**3,4**] *Let* $1 < r < 1/\delta$ *and* $\delta(r-1)/(1-r\delta) < \sigma$ *then the system (1) with* $q = \chi_\sigma$ *has the unique steady state*

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1-\delta r}{1-\delta}, \frac{1-\delta r}{r(1-\delta)}\right), \tag{2}$$

and this steady state is topologically equivalent to a stable focus.

The result preserves if we allow for nonzero left and right derivatives of the transfer function at zero.

Theorem 3 [**4**] *Let* $1 < r < 1/\delta$, *and* q *is a piece-wise differentiable transfer function continuous outside of zero with a jump at zero such that* $q(0-) < \delta(r-1)/(1-r\delta) < q(0+)$. *Then the point (2) is the unique steady state of the system (1) and it is topologically equivalent to a stable focus. Moreover, the 2-get of the respective Poincare map at the point (2) does not depend on one-sided derivatives of the function* q *at zero.*

Consider now a family $Q(., \lambda)$, $\lambda > 0$, of differentiable transfer functions that smoothes a function q from Theorem 3 and satisfies Theorem 1. Then on λ coming out of zero a limit cycle bifurcation takes place analogous to the classical soft loss of stability.

References

[1] Welander P. A. Simple Heat-Salt Oscillator, *Dynamics of Atmosphere and Oceans*, **6**:4 (1982), 233–242.

[2] Rahmstorf S. Bifurcations of the Atlantic thermohaline circulation in response to changes in the hydrological cycle, *Nature*, **378** (1995), 145–149.

[3] Davydov A. A., Melnikov N. B. Andronov–Hopf bifurcation in simple double diffusion models, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **61**:4 (2007), 175–176 (in Russian).

[4] Davydov A. A., Melnikov N. B. Soft loss of stability in ocean circulation box model with turbulent fluxes, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2007, 16 pp. (in press).

Self-averaging and critical exponents in random spin systems

De Sanctis Luca (Italy)
ICTP
lde@math.princeton.edu

We illustrate a quite general setting in which it is easy to obtain typical results in random spin systems such as mean field and finite connectivity spin glasses. From stochastic stability we can obtain self-averaging with respect to the Gibbs measure and as a consequence a family of constraints on the distribution of multi-overlaps, which are the physical quantities encoding the thermodynamic properties of the models. From the self-averaging with respect to the quenched-Gibbs measure we obtain further (and stronger) factorization properties. The same convexity arguments at the basis of the stochastic stability provide information on the free energy from which one can find the critical points and exponents of the overlaps.

Symplectic singularities of varieties: the method of algebraic restrictions

Domitrz Wojciec (Poland)
Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
domitrz@mini.pw.edu.pl

This is the joint work with S. Janeczko and M. Zhitomirskii. We study germs of singular varieties in a symplectic space. In [1] V. Arnol'd discovered so called "ghost" symplectic invariants which are induced purely by singularity. We introduce algebraic restrictions of differential forms to singular varieties and show that this ghost is exactly the invariants of the algebraic restriction of the symplectic form. This follows from our generalization of Darboux-Givental' theorem from non-singular submanifolds to arbitrary quasi-homogeneous varieties in a symplectic space. Using algebraic restrictions we introduce new symplectic invariants and explain their geometric meaning. We prove that a quasi-homogeneous variety N

is contained in a non-singular Lagrangian submanifold if and only if the algebraic restriction of the symplectic form to N vanishes. The method of algebraic restriction is a powerful tool for various classification problems in a symplectic space. We illustrate this by complete solutions of symplectic classification problem for the classical A, D, E singularities of curves, the S_5 singularity, and for regular union singularities.

References

[1] V. I. Arnold, *First step of local symplectic algebra*, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications. D. B. Fuchs' 60th anniversary collection. Providence, RI: American Mathematical Society. Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 194(44), 1999, 1–8.

On mono-monostatic bodies and turtles

Domokos G. (Hungary)
Budapest University of Technology and Economics,
Department of Mechanics, Materials and Structures
domokos@iit.bme.hu
Varkonyi P.L. (Hungary)
Budapest University of Technology and Economics,
Department of Mechanics, Materials and Structures
vpeter@mit.bme.hu

Static equulibia of rigid bodies belong to the classical chapters of mechanics. Nevertheless, there are still interesting open mathematical questions, in particular, homogeneous, convex objects with just one stable equilibrium (called monostatic) appear to be an intriguing subject.

It is easy to show [1] that in 2D (e.g. among convex homogeneous slabs, rolling in their own plane) no monostatic bodies exist, this statement is analogous to the Four-Vertex-Theorem. In 3D the situation is different: monostatic bodies do exist, even among polyhedra, here the minimal number of faces is an interesting challenge. Conway and Guy [2] showed a monostatic polyhedron with 19 faces and up to now this appears to be the lowest number. If we go to higher dimensions, monostatic bodies appear to be less and less exotic. Even monostatic simplices have been identified by Dawson, Finbow and Mak [3,4] for suffeiciently high (D¿7) dimensions.

Arnold approached the problem from a different angle and asked [5] whether in 3D one could find a monostatic object with *just one unstable equilibrium* . Due to the Poincare-Hopf Theorem, if such a body exists, it will have no further (saddle) equilibrium point, hence we will refer to this type of object as mono-monostatic.

This idea not ony yields immediately (via the Poincare-Hopf Theorem) a nice claasification for 3D objects, one can also show that the existence of 3D bodies in an arbitrary equilibrium class can be deduced from the existence of a mono-monostatic body.

We constructed such a mono-monostatic object [6] and showed [7] that these geometric forms are particularly sensitive to small perturbations. Statistical experiments with pebbles on the sea coast confirmed this statement. We also noticed that our mono-monostatic object [8] appeared to be similar to some turtle species. This visual similarity was confirmed by systematic measurements.

References

[1] Ivanov I.I. Method of theory of functions at the boundary problems on the plate. // Diff. equations.– 1997. N8. p.1069 – 1075.

[2] Domokos G., Papadopoulos J. and Ruina A. Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new? // J. Elasticity. – 1994. Vol36, p.59–66.

[3] Conway J.H., Guy R. Stability of polyhedra // SIAM Rev.–1969.Vol 11 p. 78—82.

[4] Dawson J., Finbow W., Mak P. Monostatic simplexes II. // Geometriae Dedicata – 1998. Vol 70 p.209–219

[5] Dawson J., Finbow W. Monostatic simplexes III. // Geometriae Dedicata – 2001. Vol 84 p.101–113

[6] Domokos G. My lunch with Arnold // Mathematical Intelligencer – 2006. Vol 28. No 4. p.31-33

[7] Várkonyi P.L., Domokos G. Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles and the Poincare-Hopf Theorem // J. Nonlinear Sci. –2006. Vol 16., p255–281.

[8] Várkonyi P.L., Domokos G. Mono-monostatic bodies: the answer to Arnold's question // Mathematical Intelligencer –2006. Vol 28. No.4. p34–38.

[9] www.gomboc.eu

On Uhlenbeck's manifold

Dymarskii Yakov (Ukraine)
Lugansk National Pedagogical University
dymarsky@lep.lg.ua

We consider a family

$$-\Delta y + p(x)y = \lambda y, \qquad y|_{\partial\Omega} = 0$$

of Dirihlet eigenfunctions problems in which a real potential $p \in C^3(\overline{\Omega})$ is a functional parameter. Let $W_2^2(\Omega)$ be Sobolev space, $S^\infty = \{y \in W_2^2(\Omega) : y|_{\partial\Omega} = 0, \int_\Omega y^2\, dx = 1\}$. K. Uhlenbeck [1] showed that the set

$$Q = \{q = (\lambda, y, p) \in \mathbf{R} \times S^\infty \times C^3(\overline{\Omega}) : -\Delta y + p(x)y = \lambda y\}$$

is smooth manifold with $C^3(\overline{\Omega})$ as the model space. We equip a point $q = (\lambda, y, p)$ the number n and the multiplicity m of the eigenvalue λ and obtain the stratification $Q = \bigcup_{n,m} Q(n, m)$. The topological properties of Q and the stratification will be describe.

References

[1] Uhlenbeck K. Generic properties of eigenfunctions // Amer. J. Math. – 1976. v. 98. N 4. p. 1059–1078.

Identities for Beltrami differential parameter

Dzhumadil'daev A. S. (Kazakhstan)
Institute of Mathematics, Alma-Ata
askar56@hotmail.com

An algebraic structure on functions space of n-dimensional manifold defined by Beltrami differential parameter $\Delta(f,g) = (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)$ is considered. Polynomial identities are found.

Poincaré series and monodromy of the simple and unimodal boundary singularities

Ebeling Wolfgang (Germany)
Leibniz Universitat
ebeling@math.uni-hannover.de

A boundary singularity is a singularity of a function on a manifold with boundary. The simple and unimodal boundary singularities were classified by V. I. Arnold and V. I. Matov. The McKay correspondence can be generalized to the simple boundary singularities. We consider the monodromy of the simple, parabolic, and exceptional unimodal boundary singularities. We show that the characteristic polynomial of the monodromy is related to the Poincaré series of the coordinate ring of the ambient singularity

Densities of topological invariants of subanalytic quasiperiodic sets.

Esterov A. I. (Canada)
University of Toronto
esterov@mccme.ru

The composition of a linear mapping $l : R^n \to R^N$ and the projection $R^N \to R^N/Z^N$ is called *a winding* of the torus R^N/Z^N, if its image

is dense in R^N/Z^N. The preimage $L \subset R^n$ of a subanalytic set $M \subset R^N/Z^N$ under a winding is called *a quasiperiodic subanalytic set. The density* of a numerical topological invariant i of L is the limit of the ratio $i(L \cap B)/\mathrm{Vol}(B)$ where B is a ball in R^n, and its radius tends to infinity.

The existence of the density of the Euler characteristic was proved by Gusein-Zade, see [1]. If a quasiperiodic set is discrete, then the density of its Euler characteristic equals the density of the set itself, which exists by Soprunova's theorem [2].

Theorem. *The densities of the Betti numbers of a quasiperiodic subanalytic set exist.*

The paper [3] contains a refined version of this theorem, which, in particular, explains, how to compute the answer approximately. However, note that the densities of the Betti numbers of L are not shown to depend analytically on M, which is the case for the Euler characteristic. In addition to ideas from [1] and [2], the proof is based on the following simple fact, applied to a certain infinite cell decomposition of the quasiperiodic set.

If $\sigma_1, \ldots, \sigma_a$ are the cells of a cell complex K, then there are two options for every cell σ_i of dimension k: attaching σ_i to the union $\cup_{j=1}^{i-1}\sigma_j$ either increases the k-th Betti number of the union by 1, or decreases its $(k-1)$-th Betti number by 1. Thus, the l-th Betti number of K equals the number of l-dimensional cells of the first kind minus the number of $(l+1)$-dimensional cells of the second kind.

References

[1] Gusein-Zade S.M. On the topology of quasiperiodic functions. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.– 1999. 197. Pseudoperiodic topology. p. 1 – 7.

[2] Soprunova E. Zeros of Systems of Exponential Sums and Trigonometric Polynomials. // Moscow Math. J.– 2006. 6:1. p. 153 – 168.

[3] Esterov A. Densities of topological invariants of subanalytic quasiperiodic sets. // To appear in Izvestiya RAN.

Confluence of eigenvalues and resonant Stokes operators

Glutsyuk Alexey A. (France)
École Normale Supérieure de Lyon
aglutsyu@umpa.ens-lyon.fr

The talk deals with linear ordinary differential equations in complex time with irregular singularity at 0:

$$\dot{z} = \frac{A(t)}{t^{k+1}} z, \qquad z \in C^n, \quad A(0) \neq 0.$$

The analytic classification invariants of these equations are formal normal form and *Stokes operators*, which are transition operators between appropriate solution bases (called *canonical sectorial solution bases*). The irregular singularity is called *resonant*, if the higher term matrix $A(0)$ in the right-hand side has multiple eigenvalue.

We study a *resonant irregular singularity as a limit of degenerating nonresonant singularities.* The unfolding under consideration of a resonant singularity is a family of linear equations depending on a real parameter. The perturbed equation is nonresonant and some (distinct) eigenvalues of its higher term matrix are confluent to a multiple eigenvalue. The (nonperturbed) resonant equation and its unfolding should satisfy some genericity assumptions.

The main result says that *appropriate canonical sectorial solution bases of the perturbed (nonresonant) equation tend to some canonical sectorial solution bases of the nonperturbed (resonant) equation.* This implies that *appropriate Stokes operators of the perturbed equation tend to some Stokes operators of the nonperturbed equation.*

The results of the talk extend previous analogous results of the speaker, J.-P. Ramis, A. Duval, C. Zhang, R. Schäfke (see [1] and the references therein) that study an irregular singularity as a limit of confluenting Fuchsian singularities (following an idea due to V. I. Arnold and J.-P. Ramis (1980-ths) to study Stokes operators as limit monodromy data of Fuchsian equation).

References

[1] Glutsyuk A. A., On the monodromy group of confluent linear equations, Moscow Math. J., Vol. 5 (2005), No. 1, 67–90.

ON THE STRUCTURE OF 1 : 4 RESONANCES IN HENON-LIKE MAPS

Gonchenko M. S. (Spain)
Universitat Politècnica de Catalunya
marina.gonchenko@upc.edu

We observe results of [1] on bifurcations of fixed points with multipliers $e^{\pm i\pi/2}$ (the so-called 1:4 resonances) for certain Hénon-like maps in two main cases:
1) the generalized Hénon maps (GHM)

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M_1 - M_2 x - y^2 + Rxy + Sy^3;$$

2) the cubic Hénon maps (CHM)

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M_1 - Bx + M_2 y \pm y^3.$$

Here $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, M_1 and M_2 are parameters, R and S are small coefficients.

First, we deal with conservative GHMs ($M_2 \equiv 1$ and $R \equiv 0$) and CHMs ($B \equiv 1$). In the case of GHMs the conservative bifurcations are nondegenerate if $S \neq 0$ and they are essentially different depending on the sign of S. A two-parameter analysis of the bifurcations at the critical moment $S = 0$ is also given. In CHMs the structure of the conservative $1 : 4$ resonances is nondegenerate always for the cubic map with "+", whereas, for the cubic map with "−" a degenerate situation is observed for $M_1 = \pm 16/27, M_2 = 1/3$.

In the case of nonconservative GHMs, we find conditions of nondegeneracy of the corresponding $1 : 4$ resonances and give a description of accompanying bifurcations.

This work is supported by the grant of Spanish grant FPU AP2005-4492 of “Programa de becas FPU del Ministerio de Educación y Ciencia”.

References

[1] M.S. Gonchenko. On the structure of 1:4 resonances in Henon maps. // Int.J. “Bifurcation and Chaos”.– 2005. N15(11). p. 3653–3660.

On fractal dimension of oscillatory motions

Gorodetski A. S. (Russia, USA)
Moscow Independent University
UC Irvine
asgor@mccme.ru

A motion of the 3 body problem is called oscillatory if limsup of maximal distance among the bodies is infinity as time tends to infinity and liminf is finite. V.M.Alexeev [1] explained the existence of the oscillatory motions in Sitnikov model (one of the restricted versions of the three body problem) using methods of hyperbolic dynamics. Kolmogorov conjectured that the set of oscillatory motions has zero measure.

In our joint work with V.Kaloshin [2] we show that in many cases the set of oscillatory motions in the 3 body problem has maximal Hausdorff dimension. Proof relies on investigation of area-preserving Henon family, persistent homoclinic tangencies, and splitting of separatrices. Namely, consider the Sitnikov problem. It is a special case of the restricted three body problem where the two primaries with equal masses are moving in an elliptic orbits of the two body problem, and the infinitesimal mass is moving on the straight line orthogonal to the plane of motion of the primaries which passes through the center of mass. Eccentricity e_0 of orbits of primaries is a parameter. After some change of coordinates (McGehee transformation) the infinity can be considered as a degenerate saddle with smooth invariant manifolds that correspond to parabolic motions (the orbit tends to infinity with zero limit velocity). Stable and unstable manifolds coincide in the case of circular ($e_0 = 0$) Sitnikov problem. Dankowicz and Holmes [3] showed that for non-zero eccentricity invariant manifolds have a point of transverse intersection. This leads to the existence of homoclinic tangencies and appearance of all the phenomena that can be encountered in the conservative homoclinic bifurcations.

P. Duarte [4] showed that in area preserving case existence of homoclinic tangencies leads to phenomena similar to Newhouse phenomena, where sinks are replaced by elliptic islands. We prove a stronger one parameter version of the Duarte's result. Namely, consider a generic unfolding of a quadratic homoclinic tangency associated with a saddle P_0 of an area preserving map f_0. *There is an open set U in the space of parameters such that for every $\mu \in U$ the map f_μ has a hyperbolic set with persistent homoclinic tangencies. Moreover, for every μ from some residual subset of U the map f_μ has an invariant transitive closed set H_μ such that*

$\diamond$ *the set H_μ is accumulated by f_μ's elliptic points,*

$\diamond$ $\dim_H H_\mu = 2$,

$\diamond$ $\dim_H \{x \in H_\mu \mid P_\mu \in \omega(x) \cap \alpha(x)\} = 2$, *where P_μ is the unique fixed point near P_0.*

In particular, existence of these sets of large Hausdorff dimension implies that *there is an open set U, $0 \in \overline{U}$, in the space of parameters of the Sitnikov problem such that for parameters from some residual subset of U the set of oscillatory orbits has full Hausdorff dimension. Similar statement holds for the planar circular restricted three body problem.* The existence of transversal homoclinic points in the latter case was established in [5], [6].

References

[1] Alexeyev V., Sur l'allure finale du mouvement dans le probleme des trois corps. // Actes du Congres International des Mathematiciens (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, 1971, Tome 2, p. 893 – 907.

[2] Gorodetski A., Kaloshin V. Hausdorff dimension of oscillatory motions in the restricted planar circular three body problem and in Sitnikov problem, in preparation.

[3] Dankowicz H., Holmes P. The existence of transverse homoclinic points in the Sitnikov problem. // J. Differential Equations. – 1995. vol. 116, no. 2, p.468 – 483.

[4] Duarte P. Abundance of elliptic isles at conservative bifurcations. // Dynamics and Stability of Systems. – 1999, vol. 14, no. 4, p. 339 – 356.

[5] Llibre J., Simo C., Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. // Math. Ann. – 1980, vol. 248, p. 153 – 184.

[6] Xia J., Melnikov method and transversal homoclinic points in the restricted three-body problem. // J. of Diff. Equations. – 1992, vol. 96, no. 1, p. 170 – 184.

On the local Picard group

Hamm Helmut A. (Germany)
University of Muenster
hamm@math.uni-muenster.de

Let X be a complex analytic space. The Picard group $Pic\, X$ of X is the group of isomorphism classes of holomorphic line bundles on X. Recall that $Pic\, X \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ where $\mathcal{O}_X^*$ is the sheaf of nowhere vanishing holomorphic functions.

In particular let X be a suitable representative of a germ (X, x) of a complex space embedded in $\mathbf{C}^n$. We want to prove a Lefschetz theorem for the local Picard group, i.e. compare $Pic(X \setminus \{x\})$ and $Pic(X \cap H \setminus \{x\})$ where H is a hyperplane through x which defines a divisor on X.

The ingredients in the hypothesis are the depth of $\mathcal{O}_X$ and the rectified cohomological depth $rcd\, X$ with respect to the constant sheaf $\mathbf{Z}_X$, see also [4], because of the exponential sequence

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

Theorem 1: If $depth\,\mathcal{O}_X \geqslant 3$ (resp. $\geqslant 4$) and $rcd(X \setminus \{x\}) \geqslant 4$ (resp. $\geqslant 5$) the natural mapping $Pic(X \setminus \{x\}) \longrightarrow Pic(X \cap H \setminus \{x\})$ is injective (resp. bijective).

The depth condition on the whole space X is quite strong. It can be weakened if we replace $X \cap H \setminus \{x\}$ by a suitable neighbourhood U of this space in $X \setminus \{x\}$:

Theorem 2A: If $depth\,\mathcal{O}_{X\setminus\{x\}} \geqslant 3$ (resp. $\geqslant 4$) and $rcd(X \setminus \{x\}) \geqslant 4$ (resp.$\geqslant 5$) the mapping $Pic(X \setminus \{x\}) \longrightarrow Pic\,U$ is injective (resp. bijective).

In algebraic geometry it is usual to regard the formal completion $\hat{X}$ of X along $X \cap H$ as a substitute for a tubular neighbourhood of $X \cap H$ in X. We have a corresponding analogue of Theorem 2A:

Theorem 2B: If $depth\,\mathcal{O}_{X\setminus\{x\}} \geqslant 3$ (resp. $\geqslant 4$) and $rcd(X \setminus \{x\}) \geqslant 4$ (resp. $\geqslant 5$) the mapping $Pic(X \setminus \{x\}) \longrightarrow Pic(\hat{X} \setminus \{x\})$ is injective (resp. bijective).

Furthermore it is possible to compare line bundles (and even vector bundles) on neighbourhoods of $X \cap H \setminus \{x\}$ in $X \setminus \{x\}$ which are open in the usual resp. in the Zariski topology.

The techniques of proof are of a quite diverse nature. From the topological side we need a local Lefschetz theorem as in [1]. The depth condtions for the structural sheaf are used in order to have vanishing resp. coherence properties for the local cohomology, cf. [2]. For Theorem 2 we need an extension theorem for coherent analytic sheaves on ring domains, cf. [3].

Global Lefschetz theorems for the Picard group, i.e. on projective varieties, have been proved in [4].

In the framework of algebraic geometry, A.Grothendieck has studied the Picard group in the local and global case [5]. His work has stimulated the present one, partially it inspired the methods, too.

References

[1] Hamm H.A., Lê D.T.: Rectified homotopical depth and Grothendieck conjectures. In: The Grothendieck Festschrift vol. II, pp. 311-351. Birkhäuser, Boston 1990.

[2] Bănică C., Stănăşilă O.: Algebraic methods in the Global Theory of Complex Spaces. John Wiley, London 1976.

[3] Siu Y.-T.: Techniques of extension of analytic objects. Marcel Dekker, N.Y. 1974.

[4] Hamm H.A., Lê D.T.: A Lefschetz theorem on the Picard group of complex projective varieties. In: Singularities in Geometry and Topology, pp. 640-660. World Sc. Publ., Singapore 2007.

[5] Grothendieck A.: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA II). Masson & Cie., Paris/ North Holland, Amsterdam 1968.

Formal solutions to limit cycles of polinomial differential equations. An approach to solution of Hilbert's 16th Problem

Hernandez Rosales Manuel (Mexico)
Paralaje, Mexico City
mhernandez@paralaje.net

In this talk I will show you a general method for to obtain formal solutions to periodical solutions of polynomial differential equations. The solutions, given in a series form, are in terms of coefficients that are solution of an set of infinite algebraic equations. These algebraic equations determine all the formal periodic solutions of these polynomial differential equations. The existence of possible limit cycles are represented by isolated solutions of the algebraic equations.

This method then gives an upper bound of Hilbert numbers for the Hilbert's 16th Problem for any n when we know the number of isolated solutions of the algebraic equations.

If an set of coefficients are such that the infinite dimensional vector formed by them live in a certain Hilbert space and the coeffcients are an isolated solution of the infinite algebraic equations then the formal solution become a real limit cycle. This gives the possibilitie of total solution of the Hilbert's 16th problem.

References

[1] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics. // Springer 1989 p. 399–415

[2] Yu. Ilyashenko, Centennial History of Hilbert's 16th Problem // Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 301-354.

Non-attracting attractors

Ilyashenko Yu. S. (Russia)
Moscow State University
Independent University of Moscow
Cornell University, US
Steklov Mathematical Institute

One of the major problems in the theory of dynamical systems is the study of the limit behavior of solutions. It is a general belief that after a long time delay the observer will see the orbits that belong to this or that type of attractor. Therefore, knowledge of the attractor of the system predicts the long time behavior of solutions.

In the present talk we develop an opposite point of view. Namely, we describe dynamical systems whose attractors have a large part which is in a sense unobservable. This motivated a notion of ε-attractor. It is a set (not necessary uniquely defined) near which almost all the orbits spend in average more than $1 - \varepsilon$ part of the future time. We discuss the effect of drastic non-coincidence of actual attractor and ε-attractor. For ε sufficiently small, like 10^{-30}, the difference between actual attractors and ε attractors is unobservable in the computer and physical experiments. Therefore, ε-attractors with small ε have a chance to replace actual attractors in applications.

This is a joint work with Andrei Negut, junior student of Princeton University.

Horospherical geomery in hyperbolic space

Izumiya S. (Japan)
Hokkaido University
izumiya@math.sci.hokudai.ac.jp

Recently we discovered a new geometry on submanifolds in hyperbolic space[2–8] which is called the *horospherical geometry*. In this talk we explain the outline of this geometry. In the previous theory of surfaces in hyperbolic space, there appeared two kinds of curvatures. One is called the *extrinsic Gauss curvature* K_e and another is the *intrinsic Gauss curvature* K_I. The intrinsic Gauss curvature is nothing but the sectional curvature defined by the induced Riemannian metric on the surface. The relation between these curvatures is known that $K_e = K_I + 1$. Of course the Gauss-Bonnet type theorem holds for the intrinsic Gauss curvature by the Chern-Weil theory. In [2] we defined a curvature K_h called a *hyperbolic curvature* of hypersurfaces by using the hyperbolic Gauss indicatrix. For surfaces in hyperbolic 3-space, we have the relation $K_h = 2 - 2H + K_I$, where H is the mean curvature of the surface. Therefore K_h is an extrinsic hyperbolic invariant. In [4] we have modified the hyperbolic Gauss curvature into the *horospherical Gauss curvature* $\widetilde{K}_h$ and shown that the Gauss-Bonnet type theorem holds. This curvature is not a hyperbolic invariant but it is invariant under the canonical action of $SO(n)$. However, the total curvature is a topological invariant. By definition, $\widetilde{K}_h(p) = 0$ if and only if $K_h(p) = 0$. Therefore the horospherical flatness is a hyperbolic invariant. Totally umbilical and horospherical flat hypersurfaces are hyperhorospheres. We call the geometry related to this curvature the *horospherical geometry*. For a general submanifolds in hyperbolic n-space, we have defined the horospherical Lipschitz-Killing curvature on the unit normal bundle and shown that the Chern-Lashof type theorem[7]. As corllaries, we have the Fenchel type theorem and the Milnor-Fary type theorem on space curves.

For surfaces in 3-dimensional hyperbolic space, there is an important class of surfaces called *linear Weingarten surfaces* which satisfy the relation $aK_I + b(2H - 2) = 0$. In [1] the Weierstrass-Bryant type representation formula for such surfaces with $a + b \neq 0$ (called, the *Bryant type*) has been shown. This class of surfaces contains inrinsic flat surfaces (i.e.,

$a \neq 0, b = 0)$ and CMC-1 surfaces $(a = 0, b \neq 0)$. However, the horospherical flat surface is the exceptional case (the *non-Bryant type* : $a + b = 0$). Therefore the horospherical flat surfaces are also importnat subjects in hyperbolic geometry. We will describe the geometry of horospherical flat surfaces and singularities. As consequences, some important examples of non-singular complete surfaces with constant principal curvatures appear as horo-flat surfaces. Moreover, the cuspidal beaks appear as a generic singularities of singular horo-flat surfaces. We remark that the cuspidal beaks is a non-generic Legendrian singular point.

Finally, we will try to describe geometric information on the asymptotic (or, horo-asymptotic) directions of surfaces in the hyperbolic 3-space as an application of singularity theory to various kinds of projections [7].

References

[1] Gálvez J. A., Martínez A. and Milán F. Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A plateau problem at infinity. // Trans. A.M. S. –2004. 356. p. 3405 – 3428.

[2] Izumiya S., Pei D-H. and Sano T. Singularities of hyperbolic Gauss maps. // Proc. London Math. Soc. –2003. 86. p. 485 – 512.

[3] Izumiya S., Pei D-H., Romero Fuster M. C. and Takahashi M. The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space. // J. London Math. Soc. (2) –2005. 71. p. 779 – 800.

[4] Izumiya S. and Romero Fuster M. C. The horospherical Gauss-Bonnet type theorem in hyperbolic space. // J. Math. Soc. Japan –2006. 58. p. 965 – 984.

[5] Izumiya S., Pei D-H. and Romero Fuster M. C. The horospherical geometry of surfaces in Hyperbolic 4-space. // Israel J. Math. –2006. 154. p. 361 – 379.

[6] Izumiya S., Saji K. and Takahashi, M. Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space. // preprint –2007.

[7] Izumiya S. and Tari F. Projections of surfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes, preprint –2007.

[8] Buosi M., Izumiya S. and Soares Ruas M. A. Bounds for total absolute horospherical curvature of submanifolds in hyperbolic space. in preparation.

Invariant Möbius measure and Gauss–Kuzmin face distribution

Karpenkov O. N. (Netherlands)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
karpenk@mccme.ru

Introduction. A famous statement on distribution of integers in of ordinary continued fractions was originally formulated by K. F. Gauss in 1800 and further proved by R. O. Kuzmin in 1928. One year later the result was proved one more time by P. Lévy. In 1989 V. I. Arnold generalized statistical problems to the case of one-dimensional and multidimensional continued fractions in the sense of Klein, see for instance in [1] and [2]. The one-dimensional case was studied in details by M. O. Avdeeva and V. A. Bykovskii a few years ago.

There exists a unique up to multiplication by a constant form of the highest dimension on the manifold of n-dimensional continued fractions, such that the form is invariant under the natural action of the group $PGL(n{+}1)$. A measure corresponding to the integral of such form is called a *Möbius measure*. In the present talk we show an explicit formula to calculate invariant forms in special coordinates. In the one-dimensional case the Möbius measure is induced by the relativistic measure of three-dimensional de Sitter world. The author is grateful to V. I. Arnold for constant attention to this work.

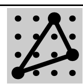
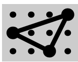
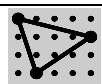
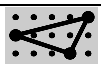
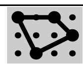
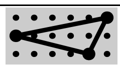
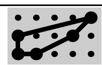
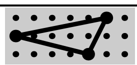
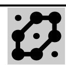
Definitions. Consider an n-dimensional real vector space with lattice of integer points in it and a collection of n straight lines in the space passing throw the origin in general position. Take any positive cone of any n vectors, lying on the distinct chosen lines (by *positive cone* we mean the set of all linear combinations of the vectors with real positive coefficients). The boundary of the convex hull of all integer points contained inside the cone is called the *sail* of the cone. The set of all sails for such cones is called the $(n{-}1)$-*dimensional continued fraction* in the sense of Klein. In this talk we study frequencies of faces of multidimensional continued fractions. Denote the sets of all ordered collections of $n{+}1$ independent straight lines by FCF_n. We say that FCF_n is a space of n-dimensional *framed continued fractions*.

Explicit formula for the Möbius form. Consider an $n+1$-dimensional real vector space with the standard metrics on it. Let π be an arbitrary hyperplane of the space with chosen Euclidean coordinates $OX_1 \dots X_n$, let also π does not pass through the origin. By the chart $FCF_{n,\pi}$ of FCF_n we denote the set of all collections of $n+1$ ordered straight lines such that any of them intersects π. Let the intersection of π with i-th plane is a point with coordinates $(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ at the plane π. For an arbitrary tetrahedron $A_1 \dots A_{n+1}$ in the plane π we denote by $V_\pi(A_1, \dots, A_{n+1})$ its oriented Euclidean volume in the coordinates $OX_{1,1} \dots X_{n,1} X_{1,2} \dots X_{n,n+1}$ of the chart $FCF_{n,\pi}$. Denote by $|\bar{v}|_\pi$ the Euclidean length of the vector $\bar{v}$ in the coordinates $OX_{1,1} \dots X_{n,1} X_{1,2} \dots X_{n,n+1}$ of the chart $FCF_{n,\pi}$. Note that the map $FCF_{n,\pi}$ is everywhere dense in FCF_n.

Proposition. The restriction of any Möbius measure to $FCF_{n,\pi}$ is proportional to the measure defined by the integration of the form

$$\frac{\bigwedge\limits_{i=1}^{n+1} \left(\bigwedge\limits_{j=1}^{n} dx_{j,i} \right)}{V_\pi(A_1, \dots, A_{n+1})^{n+1}}.$$

Table. Some results of calculations of relative frequencies

N°	face	lS	μ_2	N°	face	lS	μ_2
I		3	$1.3990 \cdot 10^{-2}$	**VI**		7	$3.1558 \cdot 10^{-4}$
II		5	$1.5001 \cdot 10^{-3}$	**VII**		11	$3.4440 \cdot 10^{-5}$
III		7	$3.0782 \cdot 10^{-4}$	**VIII**		7	$5.6828 \cdot 10^{-4}$
IV		9	$9.4173 \cdot 10^{-5}$	**IX**		7	$1.1865 \cdot 10^{-3}$
V		11	$3.6391 \cdot 10^{-5}$	**X**		6	$9.9275 \cdot 10^{-4}$

In Table we show the results of relative frequencies calculations for 10 integer-linear types of faces (on unit integer distance to the origin). In a column “face” we draw a picture of a face type; in a column “lS” we write integer areas of the faces; in a column “μ_2” we show the approximate relative frequency for the corresponding face type.

References

[1] V. I. Arnold, *Preface*, *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl., v. 197(2), (1999), pp. ix–xii.

[2] V. I. Arnold, *Higher Dimensional Continued Fractions*, Regular and Chaotic Dynamics, v. 3(1998), n. 3, pp. 10–17.

KP hierarchiy for Hodge integrals

Kazarian M. (Russia)
Steklov Mathematical Institute, Moscow
kazarian@mccme.ru

Starting from the ELSV formula, we derive a number of new equations on the generating functions for Hodge integrals over the moduli space of complex curves. This gives a new simple and uniform treatment of such known results on Hodge integrals as Witten conjecture, Virasoro constrains, Faber's l_g-conjecture etc. Among other results we show that the properly arranged generating function for Hodge integrals satisfies equations of the KP hierarchy.

Parshin's symbols and logarithmic functional

Khovanskii A. (Canada, Russia)
Department of Mathematics, University of Toronto
Independent University of Moscow
Institute for System Studies
askold@math.toronto.edu

Ten years ago at a conference in Toronto dedicated to V.I. Arnold's sixth anniversary I presented an explicit formula for product in the group

$(\mathbb{C}^*)^n$ of roots of a system of algebraic equations with general enough set of Newton polyhedra [1]. This formula (with is multi-dimensional generalization of Vieta formula) uses Parshin's symbols. Its proof however is based on simple geometry and combinatorics and does not use Parshin's reciprocity laws related to his symbols. This proof convinced me that over the complex numbers there should be an intuitive geometric explanation of Parshin's symbols and reciprocity laws. I will discuss such an explanation based on a logarithmic functional, whose argument is an $(n-1)$-dimensional cycle in the group $(\mathbb{C}^*)^n$. It generalizes the usual logarithm (which can be considered as the zero-dimensional logarithmic functional) and inherits its main properties.

References

[1] Khovanskii A. Newton polyhedrons, a new formula for mixed volume, product of roots of a system of equations. In Proceed. of a Conf. in Honor of V. I. Arnold, Fields Inst. Comm. vol. 24, Amer. Math. Soc., pages 325–364, USA, 1999.

[2] Parshin A. N. Local class field theory, Trudy Mat. Inst. Steklov, volume 165. 1984.

[3] Parshin A. N. Galois cohomology and Brauer group of local fields, Trudy Mat. Inst. Steklov, volume 183. 1984.

One-round dynamics near a homoclinic orbit to a reversible saddle-center

Koltsova O. Yu. (Russia)
Nizhny Novgorod University
koltsova@uic.nnov.ru

We studied some elements of global behavior of reversible and Hamiltonian dynamical systems with a homoclinic orbit to a saddle-center.

We considered a reversible vector field with a symmetric homoclinic orbit Γ to a singular point p of the saddle-center type. Under some generic condition we proved the existence of a two-dimensional manifold Σ filled by symmetric homoclinic orbits to the center manifold. We also established the existence of a countable set of two-dimensional manifolds accumulating to Σ. These manifolds consist of one parameter families of symmetric periodic orbits.

If we consider a Hamiltonian reversible vector field then all obtained manifolds are foliated by Hamiltonian level sets such that:

- There exists a countable set of symmetric periodic orbits on the level where p is located. These orbits are accumulated to Γ.
- There exist two symmetric homoclinic orbits to each periodic orbit on W^c and a countable set of symmetric periodic orbits accumulated to these homoclinic ones.
- There are a finite number of periodic orbits on all other levels of Hamiltonian.

Comparison of the results for reversible systems with those obtained in the Hamiltonian category has already led to a number of observations of differences, most notably the occurrence of non-symmetric heteroclinic cycles.

This research was supported by Russian Foundation of Basic Research (grant 07-01-00715a), program of supporting Russian scientific schools (grant 9686.2006.1) and Royal Society.

Three theorems on perturbed KdV equation on a circle

Kuksin S. B. (UK)
Department of Mathematics, Heriot-Watt University
kuksin@ma.hw.ac.uk

I will discuss a KAM-theory for perturbed KdV equation, an averaging theory for its Hamiltonian perturbation and an averaging theory for random perturbation of the equation.

The fundamental groups of thecomplements of affine pseudoholomorphic curves in $\mathbb{CP}^2$

Kulikov V. S. (Russia)
Steklov Mathematical Institute, RAS
kulikov@mi.ras.ru

Let $\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2$ be a pseudo-holomorphic curve with respect to some ω-tamed almost complex structureon $\mathbb{CP}^2$, where ω is symplectic Fubini–Studiform on $\mathbb{CP}^2$, and L_∞ be apseudo-holomorphic line in general position with respect to $\overline{H}$. We call $H = \overline{H} \cap (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty)$ an "affine" pseudo-holomorphic curve. In the talk, I give a complete description of the set of fundamentalgroups of the complements of "affine" pseudoholomorphic curves in $\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty$ in terms of theirrepresentations.

Periodic with multivariate time solutions of system of the quasilinear differential equations in partial derivative

Kulzhumiyeva A. A. (Kazakhstan)
Aktobe State University by Zhubanov
aiman-80@mail.ru
Sartabanov Zh. A. (Kazakhstan)
Aktobe State University by Zhubanov
aiman-80@mail.ru

In report is considered system of the quasilinear differential equations of the type

$$D_a x \equiv \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} a_j(t) \frac{\partial x}{\partial t_j} = P(\tau, t)x + f(\tau, t, x), \qquad (1)$$

where $(\tau, t) = (\tau, t_1, \ldots, t_m)$ – multivariate time, $a(t) = (a_1(t), \ldots, a_m(t))$ – vector-function.

We shall consider that for vector-function $a(t)$, $n \times n$-matrix $P(\tau, t)$ and n-vector-function $f(\tau, t, x)$ meet the condition of periodicity and of smoothness of the type

$$a(t + k\omega) = a(t) \in C_t^{(1)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m, \tag{2}$$

$$P(\tau + \theta, t + k\omega) = P(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(0,1)}(R \times R^m), \quad \forall k \in Z^m, \tag{3}$$

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, x) = f(\tau, t, x) \in C_{\tau,t,x}^{(0,1,1)}(R \times R^m \times R^n), \quad \forall k \in Z^m, \tag{4}$$

where $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$ – multiple periods, moreover $\theta = \omega_0$, ω_1, ..., ω_m – rationally incommensurable constants.

We research problem about existence (θ, ω, ω)-periodic solutions $x(\tau, t, \sigma)$ of the system (1) at condition (2), (3) and (4), where $\sigma = (-\tau, t)$ – characteristics of the operator D_a: $D_a\sigma = 0$, $\sigma(0, t) = t$.

For solution of the delivered problem we shall expect: 1) uniform system, corresponding to system (1), has not (θ, ω, ω)-periodic solutions, except trivial; 2) solutions of the system (1) satisfy initial condition of the type $x|_{\tau=0} = u(t) \in U$, where $U = \{u(t) \mid u(t + k\omega) = u(t) \in C_t^{(1)}(R^m), \forall\, k \in Z^m\}$, $| \cdot |$ – sign of Evklid's metrics.

On the strength of $[1 - -3]$ delivered problem to equivalent problem about existence of the periodic solution of the integral equation

$$x(\tau, t, x) = \int_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta,t)} [X^{-1}(\tau + \theta, t, \sigma) - X^{-1}(\tau, t, \sigma)]^{-1} \times$$

$$\times X^{-1}(h_0, h, \sigma) f(h_0, h, \sigma, x(h_0, h, \sigma))\, ds. \tag{5}$$

Here we integrate along characteristics $h_0 = s$, $h = \sigma(s - \tau_0, t_0)$ of operator D_a.

We shall notice that solution (5) of the system (1) depends not only from multivariate time, but also from $\sigma = (-\tau, t)$ – characteristics of the operator D_a. Account to such dependencies of the solution have principle importance in study quasiperiodic solutions of the common differential equations, which possible get under $t = \sigma(\tau, 0)$.

In space unceasing, evenly limited, (θ, ω, ω)-periodic n-vector-function $x(\tau, t, \sigma)$ with rate $\|x\| = \sup |x(\tau, t, \sigma)|$ shall define operator

$$(Tx)(\tau, t, x) = \int_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta,t)} [X^{-1}(\tau + \theta, t, \sigma) - X^{-1}(\tau, t, \sigma)]^{-1} \times$$

$$\times X^{-1}(h_0, h, \sigma) f(h_0, h, \sigma, x(h_0, h, \sigma))\, ds.$$

Hereinafter we install that operator T has a unique still point in this space and it possesses the property of smoothness.

Theorem. *If are executed condition* (2), (3), (4) *and uniform system, corresponding to system (1) has only trivial periodic solution, that system* (1) *allows unique* (θ, ω, ω)*-periodic solution.*

It is discussed event when period θ depends on σ.

References

[1] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. // Scientific papers international conference "Differential equations and computer algebra systems". Brest, October 5-8, 2005. – Part 1. – P. 163–165. (in Russian)

[2] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. // Izdenis – Poisk. Series natural and technical sciences. – 2005. No2. – P. 194–200. (in Russian)

[3] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. // International Scientific Conference "Mathematical analysis, differential equations and their applications". Uzhgorod, September 18-23, 2006. – P. 159–160.

Laplace's invariants of Monge–Ampère equations

Kushner A. G. (Russia)
Astrakhan State University, Astrakhan
kushnera@mail.ru

Classical Laplace's invariants are defined for linear hyperbolic equations [1]. We construct generalized Laplace's invariants for Monge-Ampère equations

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \tag{1}$$

Here A, B, C, D, E are smooth functions on x, y, v, v_x, v_y. Such equations can be considered as real (in hyperbolic case) [4] or complex (in elliptic case) [2] almost product structures on the space $J^1\mathbf{R}^2$ of 1-jets of smooth functions on the plane $\mathbf{R}^2(x, y)$. Corresponding decomposition of the de Rham complex on $J^1\mathbf{R}^2$ generates tensor differential invariants of Monge-Ampère equations [3]. Generalized Laplace's invariants ξ_1 and ξ_2 for Monge-Ampère equations are differential 2-forms on $J^1\mathbf{R}^2$ (in contrast to classical case, where Laplace's invariants are functions). Stress that classical Laplace's invariants are defined only for hyperbolic equations.

Generalized Laplace's invariants allow to solve the problem of contact linearization of Monge-Ampère equations [3]. For example, if $\xi_1 = \xi_2 = 0$, then equation (1) is contact equivalent to the linear wave equation $v_{xx} - v_{yy} = 0$ (in hyperbolic case) or to the Laplace equation $v_{xx} + v_{yy} = 0$ (in elliptic case).

References

[1] Forsyth A.R. *Theory of Differential Equations. Partial Differential Equations* (part 4, vol.6) // Cambridge University Press, 596 pp., (1906)

[2] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V., *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations* // Cambridge University Press, 496 pp., (2007)

[3] Kushner A. *Almost Product Structures and Monge-Ampère Equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics, http://ljm.ksu.ru, vol. 23, pp. 151–181., (2006)

[4] Lychagin V. *Lectures on Geometry of Differential Equations* (part 2) // "La Sapienza", Rome (1993)

Representations and quantum integrability. Recent development

Lebedev D. R. (Russia)
ITEP
lebedev@mpim-bonn.mpg.de

I shall review resent results of our group (A. Gerasimov, S. Kharchev, S. Oblezin and myself) on a direct connection between such phenomenons arising in integrable systems as separation of variables (quantum and classical) and Baxter Q-operator with representation theory of universal enveloping algebras and its quantum deformations. I shall explain connection of separated variables appear in integrable systems with moduli space of monopoles.

On some problems of symplectic topology arising in Hamiltonian dynamics

Lerman L. M. (Russia)
The University of Nizhny Novgorod,
Research Institute for Applied Math. & Cybernetics
lermanl@mm.unn.ru

Hamiltonian dynamics is a rich source of problems in symplectic topology. In fact, symplectic topology itself has appeared as a geometrization of several problems in Hamiltonian dynamics. I intend to discuss several problems which I faced with during my work under the problems in Hamiltonian dynamics, both integrable and nonintegrable. Among them interrelations between the topology of the ambient manifold and the topology of the degeneracy set for an integrable Hamiltonian system, the presence of degenerations of any order in "generic" integrable systems and bifurcations within the class of integrable systems [1], counting of intersection points for tori in scattering problems arising in homoclinic dynamics [2, 3, 4].

References

[1] Lerman L.M. Isoenergetical structure of integrable Hamiltonian system in extended neighborhood of a simple singular point: Three degrees of freedom //Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics /Eds. L.Lerman, G.Polotovsky, L.Shilnikov), Supplement, *AMS Translations, Ser. 2, V.200, Adv. in Math. Sci.*, AMS, Providence, R.I., 2000, pp. 219-242.

[2] Koltsova O.Yu., Lerman L.M. Transverse Poincare homoclinic orbits in 2N-dimensional Hamiltonian Systems Close to the System with a Loop to a Saddle-Center // Int. J. Bifurcation & Chaos, V.6, No.6 (1996), 991-1006.

[3] Koltsova O.Yu., Lerman L.M., Delshams A., Gutierrez P. Homoclinic orbits to invariant tori near a homoclinic orbit to center-center-saddle equilibrium // Physica D 201 (2005), 268-290.

[4] Pushkar P.E. Lagrangian intersections in a symplectic space // Func. Analysis Appl., v.34 (2000), No. 4, 288-292.

On the spectrum of the Sturm–Liouville operator with regular boundary conditions

Makin A. S. (Russia)
Moscow State University of Instrument-Making and Informatics
alexmakin@yandex.ru

This paper deals with the eigenvalue problem for the Sturm–Liouville equation

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

considered on the interval $(0, \pi)$ with the two-point boundary conditions determined by linearly independent forms with arbitrary complex-valued coefficients:

$$a_{i1}u'(0) + a_{i2}u'(\pi) + a_{i3}u(0) + a_{i4}u(\pi) = 0 \tag{2}$$

$(i = 1, 2)$. The function $q(x)$ is an arbitrary complex-valued function of the class $L_1(0, \pi)$. We denote $A_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$.

Let boundary conditions (2) be regular but not strengthened regular which is equivalent to the conditions $A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} \neq 0$, $A_{14} + A_{23} = (-1)^{\theta+1}(A_{13} + A_{24})$, where $\theta = 0, 1$.

It is known [1] that the eigenvalues of problem (1)+(2) form two series:

$$\lambda_0 = \mu_0^2, \quad \lambda_{n,j} = (2n + o(1))^2 \tag{3}$$

if $\theta = 0$, and

$$\lambda_{n,j} = (2n - 1 + o(1))^2 \tag{4}$$

if $\theta = 1$. Here, in both cases, $j = 1, 2$ and $n = 1, 2, \ldots$. We introduce the notation $\mu_{n,j} = \sqrt{\lambda_{n,j}} = 2n - \theta + o(1)$. It follows from [2] that asymptotic formulas (3) and (4) can be refined. Specifically,

$$\mu_{n,j} = 2n - \theta + O(n^{-1/2}).$$

For convenience we denote $< q >= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,dx$.

The main objective of the paper is obtaining essentially more precise asymptotic formulas for the eigenvalues of problem (1)+(2) and computation the regularized trace of first order.

Theorem 1. *The numbers $\mu_{n,j}$ defined above satisfy the asymptotic relations*

$$\mu_{n,j} = 2n - \theta + \frac{< q >}{2(2n-\theta)} - \frac{A_{34}}{\pi(2n-\theta)(A_{14} + A_{23})} +$$

$$+ (-1)^j \frac{f_n}{\sqrt{2n-\theta}} + \frac{r_{n,j}}{n}, \tag{5}$$

where $f_n = o(1)$, $r_{n,j} = o(1)$, and if $q(x) \in L_2(0, \pi)$, then $\{f_n\} \in l_4$, $\{r_{n,j}\} \in l_2$.

If $A_{14}=A_{23}$, $A_{34}\neq 0$, then formula (5) can be reduced to the form

$$\mu_{n,j}=2n-\theta+\frac{<q>}{2(2n-\theta)}+\frac{((-1)^j-1)A_{34}}{\pi(A_{14}+A_{23})(2n-\theta)}-$$
$$-\frac{(-1)^jA_{23}}{\pi(A_{14}+A_{23})(2n-\theta)}\int_0^\pi q(t)\cos[2(2n-\theta)t]\,dt+$$
$$+\frac{(-1)^jA_{23}^2}{2\pi A_{34}(A_{14}+A_{23})(2n-\theta)}\times$$
$$\times\int_0^\pi q(t)e^{2i(2n-\theta)t}\,dt\int_0^\pi q(t)e^{-2i(2n-\theta)t}\,dt+\frac{d_{n,j}}{n^2},$$

where $d_{n,j}=o(1)$, and if $q(x)\in L_2(0,\pi)$, then $\{d_{n,j}\}\in l_2$.

Theorem 2. *The following trace formulas hold*

$$\lambda_0-<q>-\frac{(A_{14}-A_{23})}{(A_{14}+A_{23})\pi^2}\int_0^\pi(\pi-2t)q(t)\,dt+\frac{2A_{34}}{(A_{14}+A_{23})\pi}+$$
$$+\sum_{n=1}^\infty[\lambda_{n,1}+\lambda_{n,2}-8n^2-2<q>-$$
$$-\frac{2(A_{14}-A_{23})}{(A_{14}+A_{23})\pi^2}\int_0^\pi(\pi-2t)q(t)\cos 4nt\,dt+$$
$$+\frac{4A_{34}}{(A_{14}+A_{23})\pi}]+\frac{A_{34}^2}{2(A_{14}+A_{23})^2}=0$$

if $\theta=0$, *and*

$$\sum_{n=1}^\infty[\lambda_{n,1}+\lambda_{n,2}-2(2n-1)^2-2<q>-$$
$$-\frac{2(A_{14}-A_{23})}{(A_{14}+A_{23})\pi^2}\int_0^\pi(\pi-2t)q(t)\cos[2(2n-1)t]\,dt+$$
$$+\frac{4A_{14}}{(A_{14}+A_{23})\pi}]+\frac{A_{34}^2}{2(A_{14}+A_{23})^2}=0$$

if $\theta=1$.

This work was supported by RFBR, project No. 07-01-00158.

References

[1] Marchenko V.A., Sturm-Liouville Operators and Applications (Naukova Dumka, Kiev, 1977; Birkhäuser, Basel, 1986).

[2] Naimark M.A., Linear Differential Operators (Ungar, New York, 1967; Nauka, Moscow, 1969).

Modular strata of unimodal singularities

Martin B. (Germany)
Brandenburgische Technische Universität Cottbus
`martin@math.tu-cottbus.de`

We find and describe unexpected isomorphisms between two very different objects associated to hypersurface singularities. One object is the Milnor algebra of a function, while the other object associated to a singularity is the local ring of the flatness stratum of the singular locus in a miniversal deformation, an invariant of the contact class of a defining function. Such isomorphisms exist for unimodal hypersurface singularities. However, for the moment it is badly understood, which principle causes these isomorphisms and how far this observation generalises. Here we also provide an algorithmic approach for checking algebra isomorphy.

References

[1] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps Vol. I*, Birkhäuser, (1985).

[2] C. Hertling, *Frobenius manifolds and moduli spaces for sigularities*, Camb. Univ. Press (2002).

[3] T. Hirsch, B. Martin, *Modular strata of deformation functors,* Computational Commutative and Non-commutative Algebraic Geometry, IOS Press, Amsterdam, (2005), 156-166.

[4] B. Martin, *Algorithmic computation of flattenings and of modular deformations*, J. Symbolic Computation **34**(3) (2002), 199-212.

[5] B. Martin, *Modular deformation and Space Curve Singularities*, Rev. Mat. Iberoamericana **19**(2) (2003), 613-621.

[6] B. Martin, *Modular Lines for Singularities of the T-series*, Real and Complex Singularites, Birkhäuser Verlag, Basel, (2006), 219-228.

On rational cuspidal plane curves, open surfaces and local singularities [1]

Melle-Hernández A. (Spain)
University Complutense of Madrid
amelle@mat.ucm.es

Let C be an irreducile projevtive plane curve in the complex projective plane $\mathbf{P}^2$. The classification of such curves, up to the action of the automorphism group of the plane, is a very difficult problem with many interesting connections. The main goal is to determine, for a given d, whether there exists a projective plane curve of degree d having a fixed number of singularities of given topological type. In this talk we are mainly interested in the case when C is a rational curve.

Evenmore, the classification problem of the rational cuspidal projective plane curves is quite misterious. That is, to determine, for a given d, whether there exists a projective plane curve of degree d having a fixed number of unibranch singularities of given topological type. One of the integers which help in the classification problem is the logarithmic Kodaira dimension $\bar{\kappa}$ of open surface $\mathbf{P}^2 \setminus C$. The classification of curves with $\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C) < 2$ has been recently finished by Miyanishi and Sugie, Tsunoda. and Tono.

This remarkable problem of classification is not only important for its own sake, but it is also connected with crucial properties, problems and

[1] joint work with J. Fernández de Bobadilla, I. Luengo and A. Némethi

conjectures in the theory of open surfaces, and in the classical algebraic geometry:

• **Coolidge and Nagata problem**. It predicts that every rational cuspidal curve can be transformed by a Cremona transformation into a line, (it is verified in all known cases).

• **Orevkov's conjecture** which formulates an inequality involving the degree d and numerical invariants of local singularities. In a different formulation, this is equivalent with the positivity of the virtual dimension of the space of curves with fixed degree and certain local type of singularities which can be geometrically realized.

• **Rigidity conjecture** of Flenner and Zaidenberg. Fix one of 'minimal logarithmic compactifications' (V, D) of $\mathbf{P}^2 \setminus C$, that is V is a smooth projective surface with a normal crossing divisor D, such that $\mathbf{P}^2 \setminus C = V \setminus D$, and (V, D) is minimal with these properties. The sheaf of the logarithmic tangent vectors $\Theta_V\langle D\rangle$ controls the deformation theory of the pair (V, D), The *rigidity conjecture* asserts that every $\mathbf{Q}$-acyclic affine surfaces $\mathbf{P}^2 \setminus C$ with logarithmic Kodaira dimension $\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C) = 2$ is rigid and has unobstructed deformations. Note that the open surface $\mathbf{P}^2 \setminus C$ is $\mathbf{Q}$-acyclic if and only if C is a rational cuspidal curve.

The aim of the propose talk is to present some of these conjectures and related problems, and to complete them with some results and new conjectures from the recent work of the authors in [1]:

• **'Compatibility property'** is a sequence of inequalities, conjecturally satisfied by the degree and local invariants of the singularities of a rational cuspidal curve.

Consider a collection $(C, p_i)_{i=1}^{\nu}$ of locally irreducible plane curve singularities, let $\Delta_i(t)$ be the characteristic polynomial of the monodromy action associated with (C, p_i), and $\Delta(t) := \prod_i \Delta_i(t)$, with $\deg \Delta(t) = 2\sum \delta(C, p_i)$. Then $\Delta(t)$ can be written as $1 + (t-1)\delta + (t-1)^2 Q(t)$ for some polynomial $Q(t)$. Let c_l be the coefficient of $t^{(d-3-l)d}$ in $Q(t)$ for any $l = 0, \ldots, d-3$.

Conjecture CP *Let $(C, p_i)_{i=1}^{\nu}$ be a collection of local plane curve singularities, all of them locally irreducible, such that $2\delta = (d-1)(d-2)$ for some integer d. If $(C, p_i)_{i=1}^{\nu}$ can be realized as the local singularities of a* *degree d (automatically rational and cuspidal) projective plane curve then*

$$c_l \leqslant (l+1)(l+2)/2 \quad \textit{for all} \quad l = 0, \ldots, d-3. \tag{1}$$

Theorem [**1**] *If $\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2 \setminus C)$ is $\leqslant 1$, then Conjecture CP is true (in fact with $n_l = 0$).*

References

[1] J. Fernández de Bobadilla, I. Luengo, A. Melle-Hernández, and A. Némethi, On rational cuspidal projective plane curves, *Proc. London Math. Soc.* (3) **92** (2006), no. 1, 99–138.

Submanifolds in Pseudo-Euclidean spaces, associativity equations, and Frobenius manifolds

Mokhov O. I. (Russia)
Centre for Nonlinear Studies,
L. D. Landau Institute for Theoretical Physics RAS;
Department of Geometry and Topology,
Moscow State University
mokhov@mi.ras.ru

We prove that the associativity equations of two-dimensional topological quantum field theories (the Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde and Dubrovin equations, see [1]) for a function (a *potential* or *prepotential*) $\Phi = \Phi(u^1, \ldots, u^N)$,

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \eta^{kl} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^l \partial u^m \partial u^n} = \\ = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^m \partial u^k} \eta^{kl} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^l \partial u^j \partial u^n}, \tag{1}$$

where η^{ij} is an arbitrary constant nondegenerate symmetric matrix, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \mathrm{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, are very natural reductions of the fundamental nonlinear equations of the theory of submanifolds in pseudo-Euclidean spaces (namely, the Gauss equations, the Peterson–Codazzi–Mainardi equations, and the Ricci equations) and determine a natural class of *potential* flat submanifolds without torsion. We prove that for this class of submanifolds the Peterson–Codazzi–Mainardi equations are fulfilled automatically, the Gauss equations coincide with the Ricci equations and both of them coincide with the associativity equations of two-dimensional topological quantum field theories for a potential $\Phi(u)$. We show that all potential flat torsionless submanifolds in pseudo-Euclidean spaces possess natural structures of Frobenius algebras on their tangent spaces. These Frobenius structures are generated by the corresponding flat first fundamental form and the set of the second fundamental forms of the submanifolds (in fact, the structural constants are given by the set of the Weingarten operators of the submanifolds).

Recall that each solution $\Phi(u^1, \ldots, u^N)$ of the associativity equations (1) gives N-parametric deformations of Frobenius algebras, i.e., commutative associative algebras equipped by nondegenerate invariant symmetric bilinear forms, and that locally the tangent space at every point of any Frobenius manifold bears the structure of Frobenius algebra, which is determined by a solution of the associativity equations (1) and smoothly depends on the point (see [1]). We prove that each N-dimensional Frobenius manifold can locally be represented as a potential flat torsionless submanifold in a $2N$-dimensional pseudo-Euclidean space. By our construction this submanifold is uniquely determined up to motions. Moreover, we consider a nonlinear system, which is a natural generalization of the associativity equations (1), namely, the system describing all flat torsionless submanifolds in pseudo-Euclidean spaces, and prove that this system is integrable by the inverse scattering method. The connection of the construction with integrable hierarchies, nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type with flat metrics, Poisson pencils and recursion operators can be found in [2].

References

[1] Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories // In: Integrable Systems and Quantum Groups, Lecture Notes in Math.,

Vol. 1620, Springer-Verlag, Berlin, 1996, pp. 120–348; http://arXiv.org/hep-th/9407018 (1994).

[2] Mokhov O. I. Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type with flat metrics, integrable hierarchies, and the associativity equations // Funkts. Analiz i Ego Prilozh. – 2006. – Vol. 40, No. 1. – P. 14–29; English translation in: Functional Analysis and its Applications. – 2006. – Vol. 40, No. 1. – P. 11–23; http://arXiv.org/math.DG/0406292 (2004).

[3] Mokhov O. I. Theory of submanifolds, associativity equations in 2D topological quantum field theories, and Frobenius manifolds // Proceedings of the Workshop “Nonlinear Physics. Theory and Experiment. IV”, Gallipoli (Lecce), Italy, 22 June – 1 July, 2006; Preprint MPIM2006-152. Max-Planck-Institut für Mathematik. Bonn, Germany. 2006; http://arXiv.org/math.DG/0610933 (2006) (will be published in “Theoretical and Mathematical Physics”, 2007).

Singularities and noncommutative Frobenius manifolds

Natanzon S. M. (Russia)
Moscow State University; Independent University of Moscow;
Institute Theoretical and Experimental Physics
natanzon@mccme.ru

Theory of singularity constructs an algebra on the tangent space to a polynomial $p(z) = z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ in the space $Pol(n)$ of all polynomials of this type. This algebra A_p appears also in works of Vafa as (classical) topological Landau-Ginsburg model. The algebra A_p is associative, and has an unity. It is equipped with a linear functional $l_p\colon A_p \to C$, such that the bilinear form $(d_1, d_2) = l_p(d_1 d_2)$ is non degenerates. We call by Frobenius pairs all pairs (algebra, linear functional) with these algebraic properties. Algebra A_p is commutative for any classical topological Landau-Ginsburg model.

Commutative Frobenius pairs one-to-one correspond to topological field theories that appear from closed topological strings. These topological field theories naturally extend up to open-closed topological field theories, describing strings with boundary, and even up to Kleinian topological field theories, describing strings with arbitrary world sheets. In their turn, open-closed topological field theories one-to-one correspond to combinations from one commutative and one unrestricted Frobenius pairs, connected by Cardy condition [1]. We call such algebraic structure by Cardi-Frobenius algebra.

In the present paper we construct some extension of classical topological Landau-Ginsburg model to a Cardy-Frobenius algebra with a quaternion structure. Next we prove, that the set of such quaternion Landau-Ginsburg models over all polynomials $p(z) = z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ form a non-commutative Frobenius manifold in means of [2].

Let us explain this result in more detail. The moduli space of the classical topological Landau-Ginsburg models coincides with the space $Pol(n)$ of miniversale deformation for the singularity of type A_n . The metrics $(d_1, d_2) = l_p(d_1 d_2)$ on the algebras A_p turn $Pol(n)$ into a Riemannian manifold with some additional properties. The differential-geometric structure, arising here, is an important example of Frobenius manifolds in means of Dubrovin. The theory of Frobenius manifolds has a lot of applications in different areas of mathematics (integrable systems, singularity theory, topology of symplectic manifolds, geometry of moduli spaces of algebraic curves etc.).

The Dubrovin's theory of Frobenius manifolds is a theory of flat deformations of commutative Frobenius pairs. As we discussed, Frobenius pairs are extended up to Cardy-Frobenius algebras. This suggests on extension of Frobenius manifolds to Cardy-Frobenius manifolds. An approach to this problem, is contained in [2]. It is based on Kontsevich–Manin cohomological field theory.

In this paper we define Cardy-Frobenius bundles as spaces of some flat deformations of Cardy–Frobenius algebras and prove, that they are Cardy-Frobenius (noncommutative) manifolds. Moreover we prove that the family of all the quaternion Landau–Ginsburg models form a Cardy-Frobenius bundle with quaternion structure.

References

[1] Alekseevskii A., Natanzon S. Noncommutative two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves // Selecta Mathematica., New series. – 2006. – v. 12, n. 3. – P. 307–377.

[2] Natanzon S. Extended cohomological field theories and noncommutative Frobenius manifolds // Geometry and Physics. – 2004. – 51 / 4. – P. 387–403.

A criterion of the essential spectrum for elasticity and other self-adjoint systems on peak-shaped domains

Nazarov S. A. (Russia)
Institute of Mechanical Engineering Problems, Saint-Petersburg
`serna@snark.ipme.ru, srgnazarov@yahoo.co.uk`

Let $\Omega \in \mathbb{R}^n$ be a domain bounded by the compact surface $\partial\Omega$ which is Lipschitz everywhere except at the origin $\mathcal{O}$ of the Cartesian coordinate system $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \in \mathbb{R}$. In a neighborhood $\mathcal{U}$ of the point $\mathcal{O}$ the domain is given by the relations $z > 0, \quad z^{-1-\gamma} y \in \omega$, where $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ is a domain with the Lipschitz surface $\partial\omega$ and $\gamma > 0$ the peak sharpness exponent. We consider the spectral Neumann problem

$$\overline{\mathcal{D}(-\nabla_x)}^{\top} A(x)\mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = \lambda B(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\overline{\mathcal{D}(\nu(x))}^{\top} A(x)\mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O}.$$

Here ν stands for the outward normal, A and B are Hermitian matrices of sizes $N \times N$ and $k \times k$, respectively, measurable, uniformly positive definite, and bounded for almost all $x \in \Omega$ while $N \geqslant k$. The $N \times k$-matrix $D(\nabla_x)$ consists of first-order homogeneous differential operators with constant coefficients and D is algebraically complete [1]. Then the sesquilinear form $a(u,v) = (A\mathcal{D}(\nabla_x)u, \mathcal{D}(\nabla_x)v)_\Omega$ possesses the polynomial property [2], i.e., the quadratic functional $a(u,u)$ degenerates only on a finite dimensional space $\mathcal{P}$ of vector polynomials. The variational formulation of the Neumann spectral problem reads: To find $\lambda \in \mathbb{C}$ and $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ such that

$$a(u,v) = \lambda b(u,v), \quad v \in \mathcal{H},$$

where $b(u,v) = (Bu,v)_\Omega$ and the function space $\mathcal{H}$ is obtained as the completion of $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{O})$ with respect to the norm generated by the inner product $\langle u,v\rangle = a(u,v)+b(u,v)$. Let K be a positive self-adjoint operator in $\mathcal{H}$ given by the formula

$$\langle Ku,v\rangle = b(u,v), \quad u,v \in \mathcal{H}.$$

Introducing the new spectral parameter $\mu = (1+\lambda)^{-1}$, we find that the set $\mathbb{C} \setminus \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\mu \in [0,1], \mathrm{Im}\,\mu = 0\}$ belongs to the resolvent field of the operator K and $\mu = 1$ is an eigenvalue of the multiplicity $\dim\mathcal{P} < \infty$.

Theorem. 1) *The spectrum of the operator K on the segment $\{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\mu \in (0,1], \mathrm{Im}\,\mu = 0\}$ is discrete for any $\gamma > 0$ if and only if any vector polynomial p in the linear space $\mathcal{P}$ does not depend on the variable $z = x_n$.*

2) *If the linear space $\mathcal{P}$ contains the polynomial*

$$p(y,z) = z^J p^0(y) + \cdots + z p^{J-1}(y) + p^J(y)$$

with $J \geqslant 1$ and $p^0 \neq 0$, then the embedding $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)$ is not compact for $\gamma \geqslant J^{-1}$ and, thus, the essential spectrum of the operator K contains a point different from $\mu = 0$. In the case $\gamma > J^{-1}$ the eigenvalue $\mu = 1$ with the finite-dimensional eigenspace $\mathcal{P}$ belongs to the continuous spectrum of the operator K.

Theorem delivers only a sufficient condition of the existence of a point of the essential spectrum of the operator K on the segment $\{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\mu \in (0,1], \mathrm{Im}\,\mu = 0\}$. However, for a sharp ($\gamma \geqslant 1$) peak the condition becomes also necessary and, thus, Theorem gives a criterion of the discrete spectrum.

The change $\mu \mapsto \lambda = \mu^{-1} - 1$ transmits all the properties of the spectrum of the operator K to the spectrum of the Neumann problem in the domain Ω. In particular, for a scalar Neumann problem in a peak-shaped domain, $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ and therefore the spectrum is always discrete.

The elasticity problem for a three-dimensional solid has the linear space of rigid motions $a+b\times x$ as the space $\mathcal{P}$ so that it has non-empty essential spectrum for $\gamma \geqslant 1$. In the case $\gamma < 1$ the spectrum is discrete. Much more information can be obtained for this particular problem that provoke to certain hypotheses for the problem in the general formulation.

References

[1] Nečas J. Les méthodes in théorie des équations elliptiques. Paris-Prague: Masson-Academia, 1967.

[2] Nazarov S.A. The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // Uspehi mat. nauk. – 1999. V. 54, N 5. P. 77–142. (English transl.: Russ. Math. Surveys. – 1999. V. 54, N 5. P. 947–1014).

Stability islands in domains of separatrix crossings in slow-fast Hamiltonian systems

Neishtadt A. I. (UK, Russia)
Loughborough University
Space Research Institute
aneishta@iki.rssi.ru
Simo C. (Spain)
Universitat de Barcelona
carles@maia.ub.es
Treschev D. V. (Russia)
Steklov Mathematical Institute;
Lomonosov Moscow State University
treschev@mi.ras.ru
Vasiliev A. A. (Russia)
Space Research Institute
valex@iki.rssi.ru

Many problems in the theory of charged particles' motion, the theory of propagation of short-wave excitations, and in celestial mechanics can be reduced to the analysis of 2 d.o.f. Hamiltonian systems with fast and slow variables. One degree of freedom corresponds to fast variables, and the other to slow variables. We assume that the ratio of time derivatives of slow and fast variables is of order $\varepsilon \ll 1$. To describe the dynamics in such systems one can use the adiabatic approximation (see, e.g., [1]).

The system for the fast variables at frozen values of the slow variables is called the fast system. We shall consider the situation when on the fast system's phase portrait there is a saddle point, and two separatrices passing through this point form an "8" figure. Assume that there is a region in the phase space (the domain of separatrix crossings) where the projections of phase points onto the plane of the fast variables repeatedly cross the separatrices in the process of evolution of the slow variables. We shall assume that a certain symmetry condition holds: the areas inside the separatrix loops are equal.

We show that, under certain generality conditions, in the domain of separatrix crossings on every energy level there exist many, of order $1/\varepsilon$, stable periodic trajectories of period $\sim 1/\varepsilon$. Each one of them is surrounded by a stability island, and the measure of this island is estimated from below by a value of order ε. Thus, the total measure of the stability islands is estimated from below by a quantity that is independent of ε. A stability island is a domain on an energy level bounded by a two-dimensional invariant torus. A stability island contains a discrete family of invariant tori contractible to the periodic trajectory. Let us introduce a "modified action" equal to the "action" for points inside the separatrix loops, and equal to one half of the "action" for the other points. This "modified action" is a perpetual adiabatic invariant of the motion inside a stability island: its value along a phase trajectory perpetually undergoes only oscillations with amplitude of order ε. Therefore, the stability islands are also islands of perpetual adiabatic invariance.

The existence of stability islands with total measure that is not small with ε in the domain of separatrix crossings is quite unexpected. Visually, in many problems, this domain looks like a region of dynamical chaos.

This result was established in [2] in the case of a Hamiltonian system with one degree of freedom such that the Hamiltonian function is slowly periodically depending on time. Here we generalize this result to 2 d.o.f. systems. Like in [2], the proofs are based on the study of asymptotic formulas for the corresponding Poincaré map. To find linearly stable periodic trajectories we look for linearly stable fixed points of the Poincaré map. The results on Lyapunov stability of the periodic trajectories (the fixed points) and on the existence of invariant tori surrounding the periodic trajectories (invariant curves around the fixed points) are provided by the Kolmogorov–Arnold–Moser theory.

References

[1] Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, 3rd edition // Berlin: Springer, 2006.

[2] Neishtadt A. I., Sidorenko V. V., Treschev D. V. Stable periodic motions in the problem of passage through a separatrix // Chaos, **7**, 2–11, 1997.

Fuzzy fractional monodromy

Nekhoroshev Nikolai (Russia)
Nikolai.Nekhoroshev@mat.unimi.it

A theorem about the matrix of fractional monodromy will be formulated. The monodromy corresponds to going around a fiber with a singular point of oscillator type with arbitrary resonance. The reason of fractional monodromy and fuzziness of such a monodromy is explained. Some ideas for the proof of the theorem are given.

Limit cycles appearing in polynomial perturbations of Darboux integrable systems

Novikov D. (Israel)
Weizmann Institute of Science
dnovikov@wisdom.weizmann.ac.il

We prove an existential finiteness result for integrals of rational one-forms over the level curves of Darbouxian integral.

Discrete Systems and Complex Analysis

Novikov S. P. (Russia)
novikov@landau.ac.ru
University of Maryland, College Park
Russian Academy of Sciences

Our goal is to find realization of modern mathematical ideas (such as topology, symplectic geometry, algebra and algebraic geometry) in the problems of theoretical and mathematical physics. Three examples will be discussed in this talk: quantum scattering on the graphs with tails and symplectic geometry; completely integrable systems on a trivalent tree; discretization of Complex Analysis on the equilateral triangle lattice and completely integrable systems. Some of our works in these areas are joint with I. Krichever and I. Dynnikov.

Isomonodromic deformations and special functions

Novokshenov V. Yu. (Russia)
Institute of Mathematics RAS, Ufa
novokshenov@yahoo.com

We introduce a new notion, a special function of the isomonodromy type, and show that most of the functions known in applied mathematics and mathematical physics as special functions belong to this type. In this sense, the special function provides isomonodromic deformation of some linear ODE with rational coefficients. This ODE plays a role of one of the two equations of the Lax pair. In its turn, this gives rise to an alternative definition: a matrix Riemann–Hilbert problem with a parameter, entering the conjugation matrix in a manner similar to the soliton theory. Thus the ODE for the special function appears to be integrable in the sense of Lioville–Arnold, i.e., it has the commuting integrals of motions, the invariant submanifolds and the corresponding angle variables.

We also show that our definition has not only a conceptual value: many well-known properties of the single-variable special functions can be rederived from the isomonodromy point of view. The examples of relevant Riemann–Hilbert (RH) problems are given for the Airy, Bessel, gamma and zeta functions. Those matrix RH problems are Abelian and exactly solvable, which provides the integral repesentations for these functions. We show how to get the non-Abelian generalizations of the RH problems, leading to new examples of special functions, such as Painlevé transcendents [1].

References

[1] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé Transcendents. Riemann–Hilbert Approach*, AMS Monographs, 2006, 560 p.

Givental integral representation for Classical groups

Oblezin S. V. (Russia)
Institute for Theoretical and Experimental Physics
Sergey.Oblezin@itep.ru

In 1996 Givental introduced a new representation for the $gl_{\ell+1}$ quantum Toda wave function (Whittaker function) in terms of stationary phase integral. The Givental formula admits a set of remarkable properties, particularly it has a very simple combinatorial description and admits a recursive structure with respect to the rank ℓ.

We propose integral representations for Whittaker functions for classical series $sp_{2\ell}$, $so_{2\ell}$, and $so_{2\ell+1}$ of Lie algebras. Constructed integral representations generalize Givental integral formula. Moreover, the proposed integral formulas also have simple combinatorial description, and they also admit the recursive structure. We show that the corresponding recursive operator is given by a degeneration of the Baxter Q-operator for $\widehat{gl}_{\ell+1}$-Toda chains. We generalize the construction of Q-operator to affine algebras $\widehat{sp}_{2\ell}$, $\widehat{so}_{2\ell}$, $\widehat{so}_{2\ell+1}$.

References

[1] A. Givental, *Stationary Phase Integrals, Quantum Toda Lattices, Flag Manifolds and the Mirror Conjecture*, AMS Trans. (2) **180** (1997), 103-115. Preprint 1996, [arXiv:alg-geom/9612001].

[2] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin, *On a Gauss-Givental representation for quantum Toda chain wave function*, Int. Math. Res. Notices, 6 (2006), 23 pages.
Preprint 2005, [arXiv:math.RT/0505310].

[3] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin, *Givental integral representation for classical groups*, Preprint 2006, [math.RT/0608152].

Analyticity of formal normal forms of germs of generic dicritic foliations

Ortiz-Bobadilla L. (Mexico)
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
laura@math.unam.mx
Rosales-González E. (Mexico)
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
ernesto@math.unam.mx
Voronin S. M. (Russia)
Departament of Mathematics, Chelyabinsk State University
voron@csu.ru

We consider the class $\mathcal{V}_n^d$ of dicritic germs of holomorphic vector fields in $(\mathbb{C}^2, 0)$ with vanishing n-jet at the origin, $n \geqslant 1$ and their generated foliation. In [1] is proved that under some genericity assumptions, the formal orbital equivalence of two generic germs implies their analytic orbital equivalence and orbitally formal normal forms of germs in $\mathcal{V}_n^d$ are given. In this work we give analytic normal forms of these generic germs of dicritic foliations in a neighborhood of the origin.

References

[1] L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-Gonzalez, S. M. Voronin. *Rigidity theorem for degenerated singular points of germs of dicritic holomorphic vector fields in the complex plane.* Mosc. Math. J. 5 (2005), no. 1, 171–206.

Topological invariance of the vanishing holonomy group

Ortiz-Bobadilla L. (Mexico)
UNAM
laura@math.unam.mx
Rosales-González E. (Mexico)
UNAM
ernesto@math.unam.mx
Voronin S. M. (Russia)
Chelyabinsk State University
voron@csu.ru

The problem about the topological invariance of vanishing holonomy groups was initially introduced by D. Cerveau and P. Sad in [1]. Later, Yu. Il'yashenko included it in the list of problems published in [2] (the problem 11.19). We give here its formulation as it was posed by Il'yashenko:

"Consider a germ of a holomorphic vector field at the singular point zero. Suppose that its $(n-1)$-jet is zero, and that the Taylor expansion begins with the polynomial vector field (f, g) satisfying the following genericity assumption: the polynomial $yf - xg$ has simple factors only. By one step of blowing-up, such a vector field is transformed into a complex line field having $n+1$ elementary singular points on the pasted-in divisor. This divisor with singular points deleted, is a leaf of the foliation obtained by the blow-up. The fundamental group of this leaf is free with n generators. The corresponding monodromy group is called vanishing holonomy group.

Problem. *Let two germs of the class described above be orbitally topologically equivalent. Is it true that their groups of vanishing holonomy are topologically equivalent as well? This means that there exists a germ of a homeomorphism $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ that conjugates all the corresponding generators of the two groups simultaneously."*

In this work we give a positive answer to this question under the following genericity assumptions: all the singular points obtained after the desingularisation process (blow-up) are nondegenerated; exactly two separatrices pass through each singular point.

An analogous result was obtained before in the original work [1] under more strong assumptions of hyperbolicity of all the singular points (which means that the characteristic exponents of the singular points are non real numbers), and existence of a topologically trivial deformation from one germ of vector field to the other. Later, D. Marín, in [3], obtained the same result without using of the second assumption. In our work the first genericity assumption is weakened, by comparison with that on [3].

An analogous problem in the general case, where a "nice" blow-up of a vector field consists of several σ-process, was also formulated in [1] (general conjecture). This problem was solved, for typical nilpotent singular points, by F.Loray [4].

Our method basically coincides with the method used by F.Loray in [4], and it includes some constructions already used by D. Marín [3]. The main tool of investigation is the so-called Extended Holonomy Group (see [5]).

References

[1] Cerveau, D.; Sad,P. *Problèmes de modules pour les formes diffèrentielles singulières dans le plan complexe* (French), [Moduli problems for singular differential forms in the complex plane], Comment. Math. Helv. 61 (1986), no. 2, 222–253.

[2] Ilyashenko,Y. *Selected topics in differential equations with real and complex time.* Normal forms, bifurcations and finiteness problems in differential equations, 317–354, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 137, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[3] Marín,D. *Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane.* Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 3, 518–539.

[4] Loray,F. *Rigidité topologique pour des singularités de feuilletages holomorphes.* Ecuaciones Diferenciales y Singularidades (Colloque Medina 1995),J. Mozo-Fernandez (Ed.), Universidad de Valladolid (1997), p. 213-234.

[5] Voronin,S.M. *Invariants for singular points of holomorphic vector fields on the complex plane.* The Stokes phenomenon and Hilbert's 16th problem (Groningen, 1995), 305–323, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

Hessian algebraic curves

Ortiz Rodriguez Adriana (Mexico)
IMATE
aortiz@matem.unam.mx

This talk is concerned with a global problem of the parabolic curve of an algebraic smooth surface in R^3. A hessian curve in the real plane is a projection of the set of parabolic points of the graph of some real smooth function in two variables. In particular, when the function f is a polynomial function of degree n, its hessian polynomial has degree at most $2n-4$. By Harnack theorem, the number of compact connected components of the hessian curve, $\mathrm{hessf}(x,y)=0$, is at most $(2n-5)(n-3)+1$.

It arises the natural question, Does this upper bound optimal? We will discuss progress about this question and it will be ennonced open problems related to this subject.

First order local invariants of stable mappings from R^3 to R^3 with corank 1 singularities

Oset R. (Spain)
Universitat de Valencia
raul.oset@uv.es
Romero-Fuster M.C. (Spain)
Universitat de Valencia
carmen.romero@uv.es

In [5] Vassiliev introduced a method to obtain topological invariants on function spaces. This method has proven to be very useful and has given interesting results in several cases:

i) Knots in R^3 (Vassiliev in [5]).

ii) Inmmersed plane curves (Arnol'd in [1]).

iii) Stable mappings from surfaces to R^3 (Goryunov in [2]).

iv) Stable mappings from the plane to the plane (Ohmoto and Aicardi in [4]).

v) Stable mappings form 3-manifolds to the plane (Yamamoto in [6]).

In this paper we apply this method to stable mappings with corank 1 singularities from 3-manifolds to R^3.

Starting from the classification of germs obtained by Marar and Tari in [3] we determine a complete list of germs and multigerms up to codimension 2. The analysis of the different unfoldings allows us to determine the structure of the discriminant subset (non-stable mappings) in a neighbourhood of each of the codimension 2 strata as well as to provide suitable coorientations to the codimension 1 strata. In this way we obtain 5 cocycles that form a complete set of generators for the cohomology ring $H^0(E_1(R^3, R^3), Z)$ (first order Vassiliev type invariants), where E_1 stands for stable corank 1 mappings.

Besides the obvious invariants (number of triple points, number of swallowtails and number of intersections between cuspidal edges and fold planes) we provide a geometrical interpretation for the other two invariants.

References

[1] **Arnold, V. I.**, Topological invariants of plane curves and caustics. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University, New Brunswick, New Jersey. University Lecture Series, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. viii+60 pp. ISBN: 0–8218–0308–5

[2] **Goryunov, V.V.**, Local invariants of mappings of surfaces into three-space, in: V.I. Arnold (Ed.), The Arnold-Gelfand Math Seminars: Geometry and Singularity Theory, Birkhauser, Basal, 1997, pp. 223–255.

[3] **Marar, W. L.**; **Tari, F.**, On the geometry of simple germs of corank 1 maps from R^3 to R^3. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119 (1996), no. 3, 469–481.

[4] **Ohmoto, Toru**; **Aicardi, Francesca**; First order local invariants of apparent contours. Topology 45 (2006), no. 1, 27–45.

[5] **Vassiliev, V.A.**, Cohomology of knot spaces, Adv. Soviet.Math. 21 (1990) 23—69.

[6] **Yamamoto, M.**, First order semi-local invariants of stable mappings of 3-manifolds into the plane, Thesis, Department of Math., Kyushu University, 2004.

The hydrodynamic-statistical model of forecast of the catastrophic phenomena like squalls, tornadoes, floods, landslides and mudflows

Perekhodtseva E. V. (Russia)
Hydrometeorological Center of Russia
perekhod@mecom.ru

This report is devoted to the development of the hydrodynamic-statistical model of forecast of catastrophic phenomena of dangerous wind, including squalls and tornadoes, and study of correlations between landslides, mudflows and floods with heavy rainfalls and their hydrodynamic-statistical forecast. The probability of forecast of landslides and mudflows is the function of intensity and duration of heavy rainfalls in the previous two - three days where those events are probable due to the soil structure of soil and the height over the sea level.

The model of the forecast of summer-season half-day precipitation exceeding 50mm/12h is developed using data of the objective analysis on the basis of statistical interpretation of output data of the hemispheric hydrodynamic model on the full equation (the author – Berkowich L.V.). Before that the problem was solved for selection of the most informative vector-predictor thus reducing the dimension of the space of parameters without noticeable losses of information. For this purpose the sample correlation matrix R for all potential predictors is calculated. The correlation matrix of predictors R may be reduced to a diagonal form in which the blocks with strongly dependent predictors are located near the diagonal. For diagonalization of the matrix R we put it into one-to-one correspondence with a connected graph G whose sides correspond to couple correlation coefficients r_{ij} of predictors. Depending on the given threshold r of connectedness r_{ij} we remove the sides of the graph whose $r_{ij} > r$. So the connected graph G decays into several non-connected subgraphs G_{ij} and isolated vertices. The most informative vector-predictor includes representatives of the blocks and the predictors corresponding to isolated vertices (the criteria of the informativity are the criterion of the Makhalanobis distance and the criterion of the minimum entropy by Vapnik V.N). The optimum number of predictors in the vector-predictor is usually determined by the number 6-8. This number is connected with quantity of the eigen values of the matrix R. The number of initial potential predictors for the forecast of dangerous precipitation was about 40 predictors. As the results of the said selection we have chosen the vector-predictor for recognition of dangerous precipitation with the numbers of predictors seven. For the given predictors the discriminant function F was calculate on the data of objective analysis and was used for the forecast of this phenomena to 12, 24 and 36 h ahead.

For the forecast of storm wind (V more 24 m/c) to 12 - 36 h were placed such method of diagonalization of new matrix R_1 and selection of the new informative vector-predictor with other discriminant functions $U(X)$. For the forecast of squalls and tornadoes at the territory of Russia we usually use in the beginning the hydrodynamic-statistical forecast and then we use the expert systems of empirical rules of these events. At the report are given the examples of the forecasts of the flood on 2002 year and of landslides at the North Caucasus and the examples of tornadoes and dangerous squalls at the territory of Russia and Europe.

Geography of 3-folds

Persson Ulf (Sweden)
Department of Mathematics, Chalmers University of Technology
ulfp@math.chalmers.se

That every even number $e \leqslant 2$ can occur as the euler number of a compact complex curve has been known since antiquity (i.e., since the introduction of the concept) and can easily be demonstrated by exhibiting hyper-elliptic curves The corresponding problem of determining the possible chern invariants c_1^2, c_2 for (minimal) surfaces is not yet completly settled, the case of surfaces with positive index $c_1^2 - c_2 > 0$ is particular subtle, but it is expected that no restictions appear except those given by the standard inequalities. What is known though are the possible ratios c_1^2/c_2 which can occur Those consist of a 'continous' part and a 'discrete'.

The natural question is now to consider the case of compact complex 3-folds the notion of 'minimal models' having been clarified by Mori. Now three invari ants come into play c_1^3, c_1c_2, c_3 and instead of considering the fine question, we are concerned with ratios, which can be plotted on a sphere. (This incidentally gives the notion of 'Geography' a very literal meaning.) Also here there are some a priori inequalities, but it is far from clear that those are the only ones My task is to systematically consider standard constructions and see what areas those cover. In this way one can identify interesting invariants, and pose the challenge to find new constructions of 3-folds in order to actually exhibit those. In my talk I will report on progress so far, which has mostly been concentrated on smooth 3-folds (i.e., not allowing non-smooth terminal singularities) where one incidentally notes that $c_1^3 = 0(2)$ for those (note that in general the chern-invariants will not be integers). One reasonable conjecture is to show that the 'continous' part of the invariants forms a 'convex' set. The content of this conjecture depends on what meaning you attribute to the terms, and I will pre sent and prove based on a very natural notion of the continous part K that the closure of the latter is indeed convex in the usual sense.

Specific features of Hamiltonian system

Petrova L. I. (Russia)
Moscow State University
ptr@cs.msu.su

In present work, in addition to skew-symmetric exterior differential forms, skew-symmetric differential forms, which differ in their properties from exterior forms, are used under investigation of Hamiltonian systems. These are skew-symmetric differential forms defined on manifolds that are nondifferentiable ones. Such manifolds result, for example, under describing physical processes by differential equations. This approach to investigation of Hamiltonian systems enables one to see peculiarities of Hamiltonian systems and relevant phase spaces.

The specific features of Hamiltonian system are analyzed in the case when the Lagrangian manifold is not a differentiable manifold. This can take place, for example, for mechanical systems with nonholonomic constraints. In this case the tangent and cotangent manifolds are not mutually connected. The Legendre transformation, which converts the Lagrangian function defined on tangent manifold into the Hamilton function defined on cotangent manifold, is a degenerate transformation, and hence, a correspondence between the Lagrange equation and the Hamiltonian system will be fulfilled only discretely - on pseudostructures (sections of cotangent bundle). The phase space will be formed by discrete structures.

The Lagrange equation has been obtained from the condition of maximum of the action functional S. This condition is one of conditions needed for existence of the invariant, namely, closed exterior form. But for existence of invariant it is necessary that the closure condition of dual form (determing the manifold or structure, on which the skew-symmetric form is specified) be fulfilled.

As such a condition it just serves the first relation of the Hamiltonian system which is not fulfilled for the Lagrange equation in general case (for nonholonomic constraints).

The transition from the Lagrange equation to Hamiltonian system is achieved with the help of the Legendre transformation, which transforms the tangent manifold into cotangent one. When tangent manifold is a differentiable one [1], such transition is a nondegenerate transformation. The transition from tangent manifold to cotangent one is one-to-one mapping, and Hamiltonian system and the Lagrange equation are identical.

In the case on nonholonomic constraints the tangent manifold of Lagrangian equation will be not a differentiable manifold. In this case the transition from tangent manifold to cotangent one, that is, the transition from the Lagrange equation to Hamiltonian system, is possible only as a degenerate transformation. This means that the transition to cotangent manifold composed of pseudostructures (sections of cotangent bundles) is only possible. That is, Hamiltonian system can be realized only discretely, namely, on pseudostructures. The first relation of Hamiltonian system (not connected with the Lagrange equation) is a condition of degenerate transformation and defines pseudostructure, on which the Lagrange equation proves to be integrable and is equivalent to the Hamiltonian system. In this case as the phase space it can serve only cotangent bundle sections of Lagrangian manifold.

It is known that in the case when the tangent manifold is differentiable and hence when the transition from tangent space to cotangent space is one-to one mapping, in the extended phase space $\{t, q, p\}$ there exists the Poincare invariant $ds = -Hdt + pdq$ (the differential form $-Hdt + pdq$ is a closed exterior form, that is, the differential of this form vanishes).

In the case when tangent manifold is not a differentiable manifold (and hence when the transition from tangent space to cotangent space is degenerate), Hamiltonian system will be fulfilled only on pseudostructures. The Poincare invariant will be also fulfilled only on pseudostructures, namely, on integral curves. That is, the Poincare invariant will be a closed inexact exterior form. In the directions normal to integral curves the differential ds, which corresponds to the Poincare invariant, will be discontinuous.

In the case when the Lagrangian manifold is differentiable, the Hamiltonian systems can be described by pseudogroups, in particular, by Lie pseudogroups. However, the group theory is not sufficient for describing a behavior of Hamiltonian systems and Lagrange equation for real physical processes.

References

[1] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics.-Moscow, 2003 (in Russian).

Billiard scattering on rough surfaces

Plakhov Alexander (Portugal)
University of Aveiro, Department of Mathematics
plakhov@mat.ua.pt

Billiard scattering on smooth surfaces can be described by the simple law: *angle of incidence = angle of reflection*. Now consider a *rough surface*: there are "microscopic" hollows that distort the motion of billiard particles. The question is: How to describe the reflection law in this case?

We study this question in the two-dimensional case. The notion of rough surface is defined. A reflection law is identified with a joint distribution on the (two-dimensional) parameter space: (angle of incidence, angle of reflection). The main result to be reported is characterization of the set of all possible reflection laws. We will also discuss applications of this result to the problems of minimal and maximal resistance and to studying physical phenomena like Magnus effect (lateral deflection of a spinning ball).

Some geodetics particularity in a spherically symmetrical space.

Popov N. N. (Russia)
Computer Centre of the Russian Academy of Sciences
mark00@comtv.ru

Einstein noted in one of his works that the Newtonian law of gravitation describes the gravitational phenomena as incompletely as the Coulombian law of electrostatics and magnetostatics, the electromagnetic ones. The fact that the Newtonian law is still considered satisfactory for the calculation of the celestial bodies motion, can be explained by the order of velocities and accelerations.

Proceeding from the principle of inert and gravitational mass equivalence in the general theory of relativity, Einstein reduced the task of deriving equations for a material point moving in a gravitational field, to the problem of a test body moving along a geodesic in a curved space-time. Specifically, in case the gravitational field is created by an only point mass M, the problem is reduced to a solution of differential equations of geodesics in a spherically symmetrical space described by the Schwarzschild metric.

Starting with early works of Einstein and Schwarzschild and followed by later works, the solution of geodetics equations in the spherically symmetrical space described by Schwarzschild metrics

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

has required the following time normalization:

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{ds} = 1, \tag{1}$$

where a is the Schwarzschild radius, t the world time, s the proper time along the geodesic line. Normalization (1) leads to asymptotic coincidence of the world time t and proper time s at infinity. It means physically that the test body velocity turns to zero at infinity. With the fulfilment of condition (1) the test body acceleration coincides with the Newton gravitational acceleration

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{a}{2r^2}$$

at distances $r \gg a$. Obviously, the rejection of (1) leads to gravitational acceleration depending on the test body initial speed at infinity v_∞ according to the following equation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{a}{2r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{3}{2}\frac{a}{r^2}\frac{1}{a - \frac{a}{r}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

where $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(v_\infty^2 + \frac{a}{r-a}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)^3.$

Apparently, if the test body velocity surpasses $\frac{c}{\sqrt{3}}$, the gravitational attraction turns into gravitational repulsion.

Moduli Spaces of Higher Spin Surfaces

Pratoussevitch A. (UK)
University of Liverpool
annap@liv.ac.uk

We describe the moduli space of m-spin structures on a Riemann surface. We show that any connected component of this moduli space is homeomorphic to a quotient of the vector space R^d by a discrete group action.

Birational rigidity and singularities of linear systems

Pukhlikov A. V. (Russia)
Steklov Mathematical Institute, University of Liverpool
pukh@mi.ras.ru

1. **Definition.** (i) The variety V is said to be *birationally superrigid*, if for any movable linear system Σ on V the equality $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma, V)$ holds.

(ii) The variety V (respectively, the Fano fiber space V/S) is said to be *birationally rigid*, if for any movable linear system Σ on V there exists a birational self-map $\chi \in \operatorname{Bir} V$ (respectively, a fiber-wise birational self-map $\chi \in \operatorname{Bir}(V/S)$), providing the equality $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\chi_*\Sigma, V)$.

Here $c(\Sigma, V)$ is the *threshold of canonical adjunction*, $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma)$ is the *virtual threshold of canonical adjunction.* The importance of the property of birational (super)rigidity can be seen from the following fact.

2. **Proposition.** *Let V be a primitive Fano variety, V' a Fano variety with $\mathbb{Q}$-factorial terminal singularities and Picard number one, that is,* $\operatorname{Pic} V' \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}K_{V'}$*, $\chi\colon V \dashrightarrow V'$ a birational map.*

(i) *Assume that V is birationally rigid. Then on V there are no structures of a rationally connected fiber space.*

(ii) *Assume that V is birationally rigid. Then V and V' are (biregularly) isomorphic (although the map χ itself is, generally speaking, not an isomorphism).*

(iii) *Assume that V is birationally superrigid. Then χ is a biregular isomorphism. In particular, the groups of birational and biregular self-maps of the variety V coincide:* $\mathrm{Bir}\,V = \mathrm{Aut}\,V$.

3. Here are some examples of Fano varieties, for which birational superrigidity is known.

(i) A smooth three-dimensional quartic $V = V_4 \subset \mathbb{P}^4$ is birationally superrigid: this follows immediately from the arguments of [1].

(ii) A generic complete intersection $V_{d_1,\dots,d_K} \subset \mathbb{P}^{M+k}$ of index one (that is, $d_1 + \cdots + d_k = M + k$) and dimension $M \geqslant 4$ is birationally superrigid for $V \geqslant 2k + 1$ [2,3].

(iii) More examples are given by iterated Fano double covers [4] and Fano cyclic covers [5].

4. **Conjecture.** *A smooth Fano complete intersection of index one and dimension $\geqslant 4$ in a weighted projective space is birationally rigid, of dimension $\geqslant 5$ birationally superrigid.*

5. The only known method of proving birational (super)rigidity is the *method of maximal singularities* that reduces the problem of (super)rigidity of a variety V to studying movable linear systems Σ on V with a maximal singularity (that is, a prime divisor $E \subset V^+$ satisfying the Noether-Fano inequality $\nu_E(\Sigma) > na(E)$, where $n = c(\Sigma, V)$), see [1,2,4].

References

[1] Iskovskikh V.A. and Manin Yu.I., Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, Math. USSR Sbornik. **86** (1971), no. 1, 140-166.

[2] Pukhlikov A.V., Birational automorphisms of Fano hypersurfaces, Invent. Math. **134** (1998), no. 2, 401-426.

[3] Pukhlikov A.V., Birationally rigid Fano complete intersections, Crelle J. für die reine und angew. Math. **541** (2001), 55-79.

[4] Pukhlikov A.V., Birationally rigid iterated Fano double covers. Izvestiya: Mathematics. **67** (2003), no. 3, 555-596.

[5] Pukhlikov A.V., Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections. Manuscripta Mathematica. **121** (2006), 491-526.

Singularities in relaxation oscillations and geometric control theory

Remizov A. O. (Portugal)
University of Porto
aremizov@fc.up.pt

I. Consider the slow-fast system

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) + \varepsilon f(x,y,\varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon\, G(x,y) + o(\varepsilon), \tag{1}$$

where $x \in X = R^m$, $y \in Y = R^n$, $\varepsilon \in (R^1, 0)$, and $m \geqslant 1$, $n \geqslant 3$. The slow motion field of (1) is the projection of the vector field

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,y,0), \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y),$$

onto the tangent bundle of the slow surface $S : F(x,y) = 0$ along the fibers of the bundle $\pi : E \to Y$ with the base Y and coordinates x on the fibers, where $E = X \oplus Y$. This projection is defined at the points where $TE = TS \oplus T\pi$ (here TE, TS and $T\pi$ are the tangent spaces to E, S and the fiber of π), i.e., at the points where the slow surface S is transversal to the bundle π. In coordinates it can be written as the vector field

$$\frac{dx_i}{dt} = -\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^{-1} \left\langle G, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\rangle, \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

defined on $S \setminus K$, where $K : \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = 0$ is the set of the points where $TE \neq TS \oplus T\pi$, i.e., it is the locus of the projection $S \to Y$ along X (triangle brackets mean the standard scalar product). For the study of the slow motion at the points of K consider the field

$$\dot{x}_i = -\left\langle G, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\rangle, \quad \dot{y} = G \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

where dot means differentiation with respect to the new variable τ, connected with time t by the relation $\dot{t} = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|$. Note, that the components of (3) belong to the local ideal I (in the ring of smooth germs) generated by the germs: $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|$ and $\left\langle G, \frac{\partial F_i}{\partial y}\right\rangle$, $i = 1, \dots, m$.

II. Totally singular extremals of the affine-control system

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + uf_1(x), \quad x \in R^n, \ u \in R^1, \tag{4}$$

with $n \geqslant 3$ and piecewise smooth locally bounded controls $u(t) \in U$ are the extremals of (4) such that the Hamiltonian H of (4) attains the maximum (or minimum) in the interior of U, i.e., the extremals satisfy the identity $h_1(x,p) = 0$, where $h_i(x,p) = \langle f_i(x), p\rangle$, $p \in (R^n)^*$ is the covector, $H = h_0 + uh_1$. Double differentiation of the previous identity gives $h_{01} = 0$ and $h_{001} - uh_{110} = 0$, where $h_{i_1,\dots,i_k} = \{h_{i_1}, h_{i_2,\dots,i_k}\}$, and $\{\ ,\ \}$ means Poisson brackets. The identity $h_{001} - uh_{110} = 0$ allows to express u through variables (x,p) at all points where $h_{110} \neq 0$, hence the totally singular extremals of (4) are the trajectories of the vector field

$$\frac{dx}{dt} = f_0 + \frac{h_{001}}{h_{110}} f_1, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{h_{001}}{h_{110}} \frac{\partial h_1}{\partial x}, \tag{5}$$

defined on $S \setminus K$, where $S : h_1 = h_{01} = 0$ is an invariant manifold of the field (5), and $K \subset S : h_{110} = 0$. For the study of the field (5) at the points of K consider the field

$$\dot{x} = h_{110} f_0 + h_{001} f_1, \quad \dot{p} = -h_{110} \frac{\partial h_0}{\partial x} - h_{001} \frac{\partial h_1}{\partial x}. \tag{6}$$

where dot means differentiation with respect to the new variable τ, connected with time t by the relation $\dot{t} = h_{110}$. Note that all components of the field (6) belong to the local ideal I generated by h_{110} and h_{001}.

III. The aim of the talk is to study singular points of the vector fields (3) and (6). Under some natural assumptions the germs of these fields at the singular points have a common property: among their components there exist $m+1$ ($m = 1$ for (6)) germs that generate the local ideal I (in the ring of smooth germs) containing all others component. Hence the fields (3) and (6) can be written in general form:

$$\dot{\xi}_i = v_i, \quad i = 1, \dots, m+1, \qquad \dot{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ij} v_i, \quad j = 1, \dots, l, \tag{7}$$

where the local ideal is $I = (v_1, \dots, v_{m+1})$. The spectrum of the linear part of (7) at the singular point is $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, 0, \dots, 0)$. Suppose that $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m+1$, then the set of the singular points $v_1 = 0, \dots, v_{m+1} = 0$ of (7) is the central manifold W^c of codimension $m+1$. We will consider finite-smooth normal forms of the fields (7) at the singular points. Note that some similar results for the case $m = 1$ (the local ideal I has two generators) were obtained before by J. Sotomayor, M. Zhitomirskiy (in the non-resonant case) and S. Voronin (for analytical classification).

Research was supported under grant SFRH/BPD/26138/2005.

Homogenization of some hydrodynamics problems with rapidly oscillating data

Sandrakov G. V. (Ukraine)
Kyiv National University
sandrako@mail.ru

Let ε be a small positive parameter and (u, p) be a Hopf's solution of the initial-boundary value problem for unsteady Navier–Stokes equations

$$\begin{gathered} u'_t - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = F_\varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,T), \end{gathered} \tag{1}$$

where $F_\varepsilon = F(t, x, x/\varepsilon)$, $F(t,x,y) \in L^2(0,T; L^2(\Omega; L^\infty_{per}(Y)/\mathrm{R})^n)$, $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ is a bounded domain with a smooth boundary, T is a positive number, and $2 \leqslant n \leqslant 4$. Here, a subscript *per* means 1-periodicity with respect to $y \in \mathrm{R}^n$ and $Y = [0,1]^n$ is a periodicity cell. Thus, by definition $F(t,x,y)$ is 1-periodic in y, $\int_Y F(t,x,y)dy = 0$ for a. e. $(t,x) \in (0,T)\times\Omega$, and the restriction of $F(t,x,y)$ to Y is an element of $L^2(0,T; L^2(\Omega; L^\infty(Y))^n)$.

Theorem. *Let $\nabla_x F \in L^1(0,T; L^2(\Omega; L^\infty_{per}(Y)/\mathrm{R})^{n\times n})$ and (u,p) is a solution of problem (1). Then, there are positive ε_0 and ν_0 such that*

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \nu\,\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n\times n})} \leqslant C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2\nu^{-1}),$$

and

$$\|p\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathrm{R})} \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon^2\nu^{-1-n/4}),$$

where C is a constant independent of ε and ν whenever $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ and $0 < \nu \leqslant \nu_0$.

Methods of homogenization are used to prove of the theorem (see [1]). Similar theorems for equations (1) and the linearized equations will be discussed also, for example, when $\int_Y F(t,x,y)\,dy \neq 0$.

References

[1] Sandrakov G. V. The influence of viscosity on oscillations in some linearized problems of hydrodynamics // Izvestiya: Math. – 2007. – V. 71, N 1. – P. 97–148.

The global theory of real corank 1 singularities and its applications to the contact geometry of space curves

Sedykh Vyacheslav D. (Russia)
Russian State Gubkin University of Oil and Gas
sedykh@mccme.ru

Let M^m and N^n be real C^∞-smooth closed (compact without boundary) manifolds of dimensions m and n, respectively, where $l = n - m \geqslant 0$. Consider a stable smooth mapping $f : M \to N$.

Assume that f is a mapping of corank $\leqslant 1$ that is it can have only singularities of types A_μ. We recall that f has a singularity of type A_μ at a given point $x \in M$ if its local algebra at x is isomorphic to the $\mathbf{R}$-algebra $\mathbf{R}[[t]]/(t^{\mu+1})$ of truncated polynomials in one variable of degree at most μ.

The multi-singularity of f at a point $y \in N$ is the unordered set of singularities of f at points from $f^{-1}(y)$. Multi-singularities of the mapping f are classified by elements $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \cdots + A_{\mu_p}$ of the free additive Abelian semigroup $\mathbf{A}$ generated by the symbols $A_0, A_1, A_2, \ldots$. The number $codim_l \mathcal{A} = (l+1)\sum_{i=1}^{p} \mu_i + pl$ is called the codimension of a multi-singularity of type $\mathcal{A}$.

The mapping f can have only multi-singularities of codimension at most n. The set $\mathcal{A}_f$ of points $y \in N$, where f has a multi-singularity of type $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$, is a smooth submanifold of codimension $codim_l \mathcal{A}$ in N. The Euler characteristic $\chi(\mathcal{A}_f)$ of the manifold $\mathcal{A}_f$ is the alternating sum of its Betti numbers.

We find a complete system of universal linear relations between the Euler characteristics of the manifolds of multi-singularities of mappings under consideration. Namely, we prove that for any $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$ such that $codim_l \mathcal{A} \equiv n-1 \pmod 2$, the Euler characteristic $\chi(\mathcal{A}_f)$ is a linear combination

$$\chi(\mathcal{A}_f) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^{\langle l \rangle}(X)\chi(X_f) \tag{1}$$

of the Euler characteristics $\chi(X_f)$, where the summation is carried over all $X \in \mathbf{A}$ such that $codim_l X \equiv n \pmod 2$ and $codim_l X > codim_l \mathcal{A}$.

The universality of the relation (1) means that all its coefficients do not depend on f and on the topology of the manifolds M, N. We show that every coefficient $K_{\mathcal{A}}^{\langle l \rangle}(X)$ is a rational number depending only on $\mathcal{A}, X$, and on the parity of the number l. Moreover, we produce a combinatorial algorithm for the calculation of the numbers $K_{\mathcal{A}}^{\langle l \rangle}(X)$.

The completeness of the system of relations (1) in the simplest case $m < n$ means the following. Let $W_{m,n}$ be the class of all stable smooth corank $\leqslant 1$ mappings of smooth closed m-dimensional manifolds into smooth closed manifolds of dimension n. Then any universal linear relation with real coefficients between the Euler characteristics of manifolds of multi-singularities of mappings $f \in W_{m,n}$ is a linear combination of the relations of the form (1) over all $\mathcal{A} \in \mathbf{A}$ such that $codim_l \mathcal{A} \equiv n-1 \pmod 2$ and $codim_l \mathcal{A} < n$.

We apply these results to the contact geometry of space curves. In particular, we obtain multidimensional generalizations of the Bose theorem on supporting circles of a plane curve and multidimensional generalizations of the Freedman theorem on the number of triple tangent planes of a curve in 3-space.

References

[1] V. D. Sedykh, *On the topology of singularities of the set of supporting*

hyperplanes of a smooth submanifold in an affine space, J. London Math. Soc. (2) **71** (2005), no. 1, 259–272.

[2] V. D. Sedykh, *The topology of corank* 1 *multi-singularities of stable smooth mappings of equidimensional manifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math. **340** (2005), no. 6, 441–444.

[3] V. D. Sedykh, *Corank* 1 *singularities of stable smooth mappings and special tangent hyperplanes to a space curve*, Mat. Zametki **78** (2005), no. 3, 413–427.

[4] V. D. Sedykh, *On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in* $\mathbf{R}^k$. In: Singularity Theory and its Applications, Adv. Stud. Pure Math. **43**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, 401–419.

[5] V. D. Sedykh, *Resolution of corank* 1 *singularities of the range of a stable smooth mapping into a space of the grater dimension*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **71** (2007), no. 2, 173–222.

On the diversity of nondegeneracy conditions in KAM theory

Sevryuk M. B. (Russia)
Institute of Energy Problems of Chemical Physics
sevryuk@mccme.ru

Consider a completely integrable Hamiltonian system with n degrees of freedom and its Hamiltonian perturbation. The phase space of the unperturbed system is foliated into Lagrangian invariant n-tori $I = \text{const}$ carrying conditionally periodic motions with frequency vectors $\omega(I) = \partial H_0(I)/\partial I$, where $(I_1, \dots, I_n) \in G \subset \mathbf{R}^n$ are the action variables and H_0 is the unperturbed Hamilton function. If the unperturbed system is *Kolmogorov* nondegenerate (the frequency map $\omega\colon G \to \mathbf{R}^n$ is a local diffeomorphism), then according to KAM theory, each unperturbed torus with

Diophantine frequencies gives rise to a perturbed torus with the same frequencies (provided that the perturbation magnitude is sufficiently small). If the unperturbed system is *isoenergetically* nondegenerate ($\omega \neq 0$ in G and the projectification $[\omega_1 : \cdots : \omega_n] \colon G \to \mathbf{R}\mathsf{P}^{n-1}$ of the map ω is a local diffeomorphism on every energy level hypersurface $H_0 = \text{const}$), then each unperturbed torus with Diophantine frequencies gives rise to a perturbed torus with the same frequency ratios and with the same energy value. On the other hand, if the unperturbed system is *Rüssmann* nondegenerate (there exists a positive integer $\mathcal{K}$ such that at every point $I \in G$, the linear hull of all the partial derivatives $\partial^{|\alpha|}\omega(I)/\partial I_1^{\alpha_1} \cdots \partial I_n^{\alpha_n}$ of all the orders $0 \leqslant |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant \mathcal{K}$ is $\mathbf{R}^n$), then a perturbed system admits many invariant n-tori carrying quasi-periodic motions but there is, generally speaking, *no* connection between the unperturbed frequencies and the perturbed ones.

The same three types of nondegeneracy can be defined for the so-called *upper dimensional coisotropic* invariant M-tori (whose dimension M is greater than the number n of degrees of freedom). However, in the upper dimensional Hamiltonian KAM theory, it is Rüssmann nondegeneracy that was historically considered first [1] (in contrast to the "classical" Lagrangian case) and is usually regarded as the "main" one.

Recently, in the Lagrangian framework, there were introduced nondegeneracy conditions intermediate between the Kolmogorov and Rüssmann conditions [2,3]. For example, one can formulate nondegeneracy conditions that guarantee the following *partial preservation of frequencies*: each Diophantine collection of frequencies $\omega_1^*, \ldots, \omega_k^*$ ($k < n$ being fixed) gives rise to an $(n-k)$-parameter Cantor family of perturbed invariant tori whose first k frequencies coincide with $\omega_1^*, \ldots, \omega_k^*$. Similarly, there are nondegeneracy conditions that are intermediate between the isoenergetic and Rüssmann conditions and lead to *partial preservation of frequency ratios* [2,3].

The case of the *lower dimensional isotropic* invariant m-tori (whose dimension m is less than the number n of degrees of freedom) is more complicated. In the lower dimensional Hamiltonian KAM theory, one should take into account not only the frequencies $\omega_1, \ldots, \omega_m$ of the invariant tori but also their *Floquet exponents* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}$, i.e., the eigenvalues of the coefficient matrix for the variational equation along the torus. However, the Kolmogorov, isoenergetic, and Rüssmann nondegeneracy conditions can be carried over to lower dimensional invariant tori (not in a unique way), all the lower dimensional versions of these conditions involving the unperturbed Floquet exponents, and sometimes the dependence of the system on several external parameters is required. Partial preservation of the frequencies or frequency ratios in the lower dimensional context has been explored in the works [3–5]. Very recently, *partial preservation of frequencies and Floquet exponents* was also treated [6].

References

[1] Parasyuk I.O. Conservation of multidimensional invariant tori of Hamiltonian systems // Ukrain. Math. J. – 1984. – V. 36, N 4. – P. 380–385.

[2] Chow S.-N., Li Y., Yi Y. Persistence of invariant tori on submanifolds in Hamiltonian systems // J. Nonlinear Sci. – 2002. – V. 12, N 6. – P. 585–617.

[3] Sevryuk M.B. Partial preservation of frequencies in KAM theory // Nonlinearity. – 2006. – V. 19, N 5. – P. 1099–1140.

[4] Li Y., Yi Y. Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems // J. Differ. Equations. – 2005. – V. 208, N 2. – P. 344–387.

[5] Liu Zh. Persistence of lower dimensional invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems // Nonlinear Anal. – 2005. – V. 61, N 8. – P. 1319–1342.

[6] Sevryuk M.B. Partial preservation of frequencies and Floquet exponents in KAM theory // Proc. Steklov Inst. Math. (submitted).

Three classical problems of parametric resonance

Seyranian A. P. (Russia)
Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University
seyran@imec.msu.ru

A problem of stabilization of a vertical (inverted) position of a pendulum under high frequency vibration of the suspension point is considered. Small viscous damping is taken into account, and periodic excitation function describing vibration of the suspension point is assumed to be arbitrary. A formula for stability region of Hill's equation with damping near zero frequency is obtained. For several examples it is shown that analytical and numerical results are in a good agreement with each other. An asymptotic formula for stabilization region of the inverted pendulum is derived. It is shown that the effect of small viscous damping is of the third order, and taking it into account leads to increasing critical stabilization frequency. The method of stability analysis is based on calculation of derivatives of the Floquet multipliers.

The swing problem is undoubtedly among the classical problems of mechanics. It is known from practice that to set a swing into motion one should erect when the swing is in limit positions and squat when it is in the middle vertical position, i.e., carry out oscillations with double the natural frequency of the swing. However in the literature you can not find formulae for instability regions explaining the phenomenon of swinging. In the present paper the simplest model of the swing is described by a massless rod with a concentrated mass periodically sliding along the rod axis. Based on analysis of multipliers the asymptotic formulae for instability (parametric resonance) domains in the three-dimensional parameter space are derived and analyzed.

The third classical problem is the problem of finding instability regions for a system with periodically varying moment of inertia. An equation describing small torsional oscillations of the system with periodic coefficients dependent on four parameters including damping is derived. Analytical results for instability (parametric resonance) regions in parameter space are obtained. Numerical examples are presented.

Asymptotics of eigenfunctions to linear ordinary differential operators and Stokes lines

Shapiro B. (Sweden)
Stockholm University
shapiro@math.su.se

In the talk I describe the asymptotic root distribution for the eigenfunctions of the classical univariate Schroedinger operator with polynomial coefficients as well simliar asymptotics for a general class of the so-called exactly solvable operators. A (partially conjectural) relation to the Stokes lines will be pointed out. All the necessary notions will be defined during the talk.

Inverse problem for a finite semiconductor network on the annulus

Shapiro Michael (USA)
Michigan State University
mshapiro@math.msu.edu

This is a joint work with **Mikhail Gekhtman** (University of Notre Dame) and **Alexander Vainshtein** (Haifa University).

A directed graph G whose arcs are equipped with positive numbers (conductivities) x_e, $e \in Edge(G)$ is called a semiconductor network. For a given semiconductor network we define the boundary measurement between a source node u and a sink node v as the total conductivity between these two nodes, namely, $\sum_{P:u\to v} \prod_{e\in P} x_e$, where the sum is taken over all directed paths P connecting u and v while the product is taken over all arcs e of path P.

The inverse problem for semiconductor networks can be formulated as follows. *Is it possible to restore a semiconductor network (up to some natural equivalence relations) given a complete collection of boundary measurements?*

A.Postnikov in a recent preprint [1] considered the inverse problem for semiconductor networks on the disk with sources and sinks on the boundary circle. He described all elementary transformation of networks generating a natural equivalence relation and proved that the inverse problem has a unique solution up to this equivalence.

In the current paper we consider a semiconductor network on the annulus where all sources belong to the inner circle and all sinks are on the outer circle. To make this problem meaningful we need to introduce a spectral parameter in the definition of boundary measurements. Unlike networks on the disk the inverse problem on the annulus does not have a unique solution up to a natural equivalence. We describe all inverse problem solutions for networks on the annulus with only one source and one sink.

References

[1] Postnikov A. Total positivity, Grassmannians, and networks // arXiv:math/0609764.

Fluid models and phase transitions in the large queuing networks

Shlosman S. B. (Russia)
IITP RAS
shlosman@gmail.com

We show that in some models of large networks it is possible to observe the onset of coherent behavior. The corresponding long range memory effect can be a source of slowing down of the network performance. The phase transition is turned on once the load exceeds the critical level. It is similar to the low temperature breaking of continuous symmetry in statistical physics.

This is a joint work with A. Rybko and A. Vladimirov.

Enumeration of real rational curves on Del Pezzo surfaces

Shustin Eugenii (Israel)
Tel Aviv University
shustin@post.tau.ac.il

A systematic development of the enumerative geometry of real algebraic curves has been initiated by the discovery of Welschinger invariants [5] and the appearance of tropical enumerative geometry [4]. In a particular case of a real Del Pezzo surface Σ with a non-empty real part $\Sigma(\mathbb{R})$, with any real ample divisor D and a component σ of $\Sigma(\mathbb{R})$, one can associate the Welschinger invariant $W_\sigma(\Sigma, D)$, which counts with appropriate weights ± 1 the real rational curves in the linear system $|D|$, passing through $r(\Sigma, D) := c_1(\Sigma) \cdot D - 1$ generic points in σ. The invariant does not depend on the choice of fixed points, and provides a uniform lower bound the the number of real rational curves in $|D|$ passing through any chosen configuration of $r(\Sigma, D)$ real points in σ, whereas the corresponding genus zero Gromov-Witten invariant $GW_0(\Sigma, D)$ gives an upper bound. The tropical geometry converts the computation of the Welschinger invariants into a count of certain plane tropical curves (finite planar graphs), passing through configurations of $r(\Sigma, D)$ points in the plane. This allows one to establish interesting phenomena in the behavior of Welschinger invariants. Among them

Conjecture 1. *Welschinger invariants of all real Del Pezzo surfaces with a non-empty real part are positive.*

This, in particular, would imply that: *Given a real Del Pezzo surface Σ and a real ample divisor D, through ant $r(\Sigma, D)$ generic points, belonging to the same connected component of $\Sigma(\mathbb{R})$, one can trace at least one real rational curve $C \in |D|$.*

Another observation is

Conjecture 2. *For any real Del Pezzo surface Σ with $\Sigma(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, any component σ of $\Sigma(\mathbb{R})$, and any real ample divisor $D \subset \Sigma$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log W_\sigma(\Sigma, nD)}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log GW_0(\Sigma, nD)}{n \log n} = c_1(\Sigma) \cdot D \ .$$

Using the tropical geometry techniques, we prove

Theorem 1 ([1,2]). *Conjectures 1 and 2 hold for the plane $\mathbb{P}^2$, the quadric $(\mathbb{P}^1)^2$, the plane $\mathbb{P}^2_k$ blown up at k generic real points, $1 \leqslant k \leqslant 4$, the quadric $\mathbb{S}^2$ with $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}) \simeq S^2$, and for that quadric $\mathbb{S}^2_{1,0}$, $\mathbb{S}^2_{2,0}$, $\mathbb{S}^2_{0,2}$ blown up at one or two real points, or at two imaginary conjugate points.*

An important problem is to find recursive formulas for the Welschinger invariants similar to that for the Gromov-Witten ones, like the Kontsevich formula (WDVV equation), or the Caporaso-Harris formula. No analogue of the Kontsevich formula is known. One, however, can prove

Theorem 2 ([3]). *Welschinger invariants of $\mathbb{P}^2$ and $\mathbb{P}^2_k$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, satisfy a Caporaso-Harris type recursive formula.*

It is especially interesting that this formula includes tropical Welschinger invariants, which so far have no algebraic analogue.

References

[1] I. Itenberg, V. Kharlamov, and E. Shustin. Logarithmic equivalence of Welschinger and Gromov-Witten invariants. *Russian Math. Surveys* **59** (2004), no. 6, 1093–1116.

[2] I. Itenberg, V. Kharlamov, and E. Shustin. New cases of logarithmic equivalence of Welschinger and Gromov-Witten invariants. Preprint at arXiv:math.AG/0612782.

[3] I. Itenberg, V. Kharlamov, and E. Shustin. A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces. Preprint at arXiv:math.AG/0608549.

[4] G. Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$. *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), 313–377.

[5] J.-Y. Welschinger. Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. *Invent. Math.* **162** (2005), no. 1, 195–234.

Long-term evolution of the asteroid orbits at the 3:1 mean motion resonance with Jupiter planar problem

Sidorenko V. V. (Russia)
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow
sidorenk@spp.keldysh.ru

We consider the 3:1 mean-motion resonance of the planar elliptic restricted three body problem (Sun-Jupiter-asteroid). Using the numeric averaging both over the orbital motion and resonant angle librations/oscillations, we obtained the evolutionary equations which describe the long-term behavior of the asteroid's argument of pericentre and eccentricity. The detailed classification of the possible evolution paths was developed. It generalized significantly the similar results on secular effects in the discussed problem recently obtained under the scope of the well known Wisdom model [1].

The validity of the averaged equations is closely connected with conservation of the approximate integral (adiabatic invariant) possessed by the original system. Qualitative changes in the behavior of the resonant angle cause the violations of the adiabatic invariance and the regions of the adiabatic chaos appear in the system's phase space.

A special attention was given to the very-high-eccentricity asteroidal motion. Being limited to relatively small values of the eccentricity the Wisdom model did not allow to study the the transitions from the moderate values of the eccentricity ($e \sim 0.2 - 0.3$) to the values $0.9 - 0.95$ although their existence was demonstrated [2]. We found that under the certain conditions the region of the adiabatic chaos can be a place where such transitions are permissible.

References

[1] Neishtadt A.I., Sidorenko V.V. Wisdom system: dynamics in the adiabatic approximation. // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 2004. **90**, p. 307–330.

[2] Ferraz-Mello S., Klafke J.C. A model for the study of very-high-eccentricity asteroidal motion. The 3:1 resonance. *Predictability,*

Stability and Chaos in N-body Dynamical Systems. Ed. Roy A.E. New York: Plenum Press (1991), p. 177–184.

Geometry of singular manifolds in a zero-pressure adhesive flow

Sobolevski A. N. (Russia)
Moscow State University
sobolevski@phys.msu.ru

Free inertial flow of a continuous fluid with no pressure or viscosity develops singularities when and where trajectories of particles cross.

To continue the motion after a singularity, one needs to know what happens to colliding particles. In a number of applications varying from cosmology to numerical fluid dynamics, particles are assumed to be s̈ticky, i.e., to collide absolutely inelastically. In spite of the apparent simplicity of this model constructing the flow beyond singularities is a challenge. We suggest a mathematical framework for multidimensional adhesive ballistic flows and characterize their singularities geometrically.

Ordinary double solids

Steenbrink Joseph H. M. (Netherlands)
Radboud University
J.Steenbrink@math.ru.nl

This is a report on joint work with Martijn Grooten. It concerns double covers of projective three-space whose ramification surface has degree four and has only generic projection singularities. We analyze their Abel–Jacobi mappings.

A KAM phenomenon for singular holomorphic vector fields

Stolovitch L. (France)
Université Paul Sabatier, CNRS-Institut de Mathématiques de Toulouse
stolo@picard.ups-tlse.fr

Let X be a germ of holomorphic vector field at the origin of $\mathbf{C}^n$ and vanishing there. We assume that X is a "good perturbation" of a "non-degenerate" singular completely integrable system. The latter is associated to a family of linear diagonal vector fields which is assumed to have nontrivial polynomial first integrals (they are generated by the so called "resonant monomials"). We show that X admits many invariant analytic subsets in a neighborhood of the origin. These are biholomorphic to the intersection of a polydisc with an analytic set of the form "resonant monomials = constants". Such a biholomorphism conjugates the restriction of X to one of its invariant varieties to the restriction of a linear diagonal vector field to a toric variety. Moreover, we show that the set of "frequencies" defining the invariant sets is of positive measure.

In particular, we show that a volume preserving germ of holomorphic vector field which is a small pertubation of a non-degenerate volume preserving polynomial vector field has a "lot" of invariant manifolds biholomorphic to the intersection of "$x_1 \cdots x_n =$ constant" with a fixed polydisc. Of course, we also recover the classical KAM theorem for hamiltonians in a neighbourhood of a fixed point.

References

[1] Arnold V.I. Proof of a theorem by A. N. Kolmogorov on the persistence of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian. Russ. Math. Surv.–1963. N18. p.9–36.

[2] Arnold V.I. Small denominators and the problem of stability of motion in the classical and celestian mechanics. Russ. Math. Surv.–1963. N 18. p.85-–191.

[3] Bost J.-B. Tores invariants des syst'emes dynamiques hamiltoniens (d'apr'es Kolomogorov, Arnol'd, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, . . .), in Séminaire Bourbaki. Astérisque–1986. N 133–134. p.113–157.

[4] Stolovitch L. A KAM phenomenon for singular holomorphic vector fields. Publ. Math. I.H.E.S.–2005. N 102. p.99–165.

Classifying spaces in singularity theory and elimination of singularities

Szűcs A. (Hungary)
Eötvös Loránd University
szucs@cs.elte.hu

The classifying spaces of cobordisms of singular maps with an allowed set of singularities form certain fibrations. (See [2].) Using these fibrations we answer explicitely a question of Arnold about the elimination of a singularity - at least up to cobordism.

In [1] V. I. Arnold and his coauthors posed the question: Suppose for a smooth map the homology class of a given singularity stratum of the map vanishes. Does this imply that that singularity type can be eliminated by a homotopy?

The question in this form has a negative answer.

We shall consider an analogous question, namely: When the given singularity type can be eliminated by a restricted cobordism of the map. The cobordism will be called *restricted* if it has no singularities not equivalent to the singularities of the original map.

We will give a necessary and sufficcient condition for the elimination of a top singularity of a smooth map by a restricted cobordism. This answer turns out to be very similar to the one suggested by the above question of Arnold.

Before giving the precise formulation let us recall that the *Thom polynomial* of a singularity type gives the cohomology class dual to a given singularity stratum. Such a stratum has a special normal structure and *higher Thom polynomials* express the normal characteristic classes of this stratum.

Theorem:

Let M^n and P^{n+k} be smooth manifolds, $k > 0$, and let $f : M^n \to P^{n+k}$ be a generic smooth map, and let η be its top (i.e. most complicated) singularity type. Then

1) the restrited cobordism classes of n-manifolds into P^{n+k} form an Abelian group.

2) A non-zero multiple of the element of this group represented by the map f contains an η-free smooth map if and only if the Gysin map $f_!$ annihilates the Thom polynomial of the η stratum of f together with all the higher Thom polynomials of this stratum.

References

[1] V. I. Arnold, V.V. Goryunov, O.V. Lyashko, V. A. Vasil'ev: Singularity theory I, 1998. Springer

[2] A. Szűcs: Cobordism of singular maps. // Arxiv math. GT/0612152

Binary quadratic forms with semigroup property[1]

Timorin V. A. (Russia)

IUM, Moscow

timorin@math.sunysb.edu

A quadratic form f is said to have semigroup property if its values at points of the integer lattice form a semigroup under multiplication. A problem of V. Arnold is to describe all binary integer quadratic forms with semigroup property. If there is an integer bilinear map s such that $f(s(x, y)) = f(x)f(y)$ for all vectors x and y from the integer 2-dimensional lattice, then the form f has semigroup property. We give an explicit integer parameterization of all pairs (f, s) with the property stated above. We do not know any other examples of forms with semigroup property.

[1] joint work with F. Aicardi

Gibbs entropy and dynamics

Treschev D. V. (Russia)
Steklov Mathematical Institute, RAS
treschev@mi.ras.ru

Let (M, μ) be a measure space and let ν be another measure on M: $d\nu = \rho\, d\mu$. We define the Gibbs entropy $s(\rho) = \displaystyle\int \rho \log \rho\, d\mu$ and some its modifications (the coarse-grained entropy).

We plan to discuss the question: how physical are these objects in the sense:

– do they grow if a μ-preserving dynamics appear?

– what properties of the dynamics are responsible for this growth?

– in what extent this "growth" can be independent of arbitrariness of the construction?

Here one should keep in mind that if the dynamics is reversible, some strong restrictions are imposed on any entropy-like dynamical quantity.

On the richness of the Hamiltonian chaos

Turaev Dmitry (Israel)
Ben Gurion University
turaev@math.bgu.ac.il

We show an ultimate richness of chaotic dynamics of symplectic diffeomorphisms that have an elliptic point. These maps form an open subset D_n in the space of all C^∞-smooth symplectic diffeomorphisms of R^{2n} (a widely believed conjecture is that the C^∞-closure of D_n coincides with the set of all symplectic diffomorphisms that are not uniformly partially-hyperbolic). Our main theorem is that
a C^∞-generic map from D_n is universal
in the sense of the following definition. Let f be a symplectic C^∞-diffeomorphism $R^{2n} \to R^{2n}$. Let ψ be a C^∞-diffeomorphism $R^{2n} \to R^{2n}$

such that it preserves the standard symplectic form modulo a constant factor (i.e., ψ is a symplectic diffeomorphism times a constant). Let B_{2n} be the unit ball in R^{2n}.

We call the map $f_{k,\psi} = \psi^{-1} \circ f^k \circ \psi|_{B_{2n}}$ a *renormalized iteration* of f. This is a symplectic diffeomorphism $B^{2n} \to R^{2n}$.

We call the map f *universal*, if the set of all its renomalized iterations is C^∞-dense in the set of all symplectic C^∞-diffeomorphisms $B^{2n} \to R^{2n}$.

We stress that the renormalized iterations are just iterations up to a coordinate transformation. Therefore, the iterations of any universal map approximate arbitrary well all symplectic dynamics possible in R^{2n}. By proving the genericity of the universal maps, we thus show an ultimate richness of the chaotic behavior near elliptic points of a typical $2n$-dimensional symplectic diffeomorphism: the dynamics of any single such diffeomorphism is as complicated as the dynamics of all symplectic diffeomorphisms of R^{2n} *altogether*.

On double Hurwitz numbers in genus 0

Vainshtein A. (Israel)
University of Haifa
alek@math.haifa.ac.il

We study double Hurwitz numbers in genus zero counting the number of covers $CP^1 \to CP^1$ with two branching points with a given branching behavior. By the recent result due to Goulden, Jackson and Vakil, these numbers are piecewise polynomials in the multiplicities of the preimages of the branching points. We describe the partition of the parameter space into polynomiality domains, called chambers, and provide an expression for the difference of two such polynomials for two neighboring chambers. Besides, we provide an explicit formula for the polynomial in a certain chamber called totally negative, which enables us to calculate double Hurwitz numbers in any given chamber as the polynomial for the totally negative chamber plus the sum of the differences between the neighboring polynomials along a path connecting the totally negative chamber with the given one.

The B. and M. Shapiro conjecture in real algebraic geometry and the Bethe ansatz

Varchenko A. (USA)
University of North Carolina at Chapel Hill
anv@email.unc.edu

I shall discuss the proof of Shapiro's conjecture by methods of math physics. The Shapiro's conjecture says the following. If the Wronskian of a set of polynomials has real roots only, then the complex span of this set of polynomials has a basis consisting of polynomials with real coefficients. This statement, in particular, implies the following result. If all ramification points of a parametrized rational curve $f : CP^1 \to CP^r$ lie on a circle in the Riemann sphere CP^1, then f maps this circle into a suitable real subspace $RP^r \subset CP^r$. The proof is based on the Bethe ansatz method in the Gaudin model. The key observation is that a symmetric linear operator on a Euclidean space has real spectrum.

Equations and solutions for moving of a rotating body in chemical processes. Spiral trajectories and photophoresis

Vedenyapin V. V. (Russia)
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Moscow State Region University
vicveden@kiam.ru

The book [1] contains an assertion about spiral trajectories of a rigid body and consideration of movement with changing of inertia ellipsoid. Those topics have applications in moving of sputniks [7] and in chemical kinetics of big reacting particles.

The case of a big particle, moving in chemically reacting gas, was considered. It was called chemojet motion and was found experimentally by o a group of scientists from Chemical faculty of Moscow State University [8]. A model of a chemical reaction on the surface of a body was created and a system of equations of motion was written and investigated.[2,3] We got an ideal cylindrical spiral trajectory in asymptotic when time tends to infinity. This justified qualitatively the result of experiment of European Cosmic Agency and in Moscow State University. A step and a diameter of those cones were calculated in exact form.

This model was used for explanation of photoforesis [4]. The term photophoresis was proposed by Felix Ehrenhaft [5]. In his experiments dust, silver and copper particles in gases irradiated by light "strongly exhibited a tremendous lightnegative movement, although they ought to be most heated on the side toward the light, and would expect a movement away from the light" ([6]).

Movement away from light was called lightpositive or positive photophoresis and towards it lightnegative or negative photophoresis.

"During the course of the experiment, the motion of the particle traced out a "spiral" path. However upon magnification of a given section of a given spiral, one saw a "spiral" path within the path of the larger spiral... In viewing these microphotographs, one had the distinct impression that something phenomenal was happening, but no definitive explanation for the observation was presented" [6].

Now it is clear that Felix Ehrenhaft spiral paths and so both positive and negative photophoresia have their explanation in the framework of chemojet motion: the former as a consequence of reactive forces and the latter of counter reactive ones. On the other hand Ehrenhaft spiral paths strongly support all mathematical theory of motion of any big particle in reacting gas, constructed in papers [2-4].

References

[1] Арнольд В.И. Математические методы классической механики, М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[2] Vedenyapin V.V., Batysheva Y.G., Melihov I.V. and Gorbatchevski A.Ya. On a motion of solids in chemically active gaz // Doclady Physics, V. 48, No 10, P. 556-558 (2003). Translated from Doklady Akademii Nauk, Vol. 392, No 6, pp. 738-780 (2003).

[3] J.G.Batisheva. On the Derivation of Dynamic Equations for a Rigid Body in a Gas Reacting Nonuniformly with Its Surface // Doklady

Physics, Vol. 48, No. 10, 2003, pp. 587-589. Translated from Doklady Akademii Nauk, vol. 392, No. 5, 2003, pp. 631-633.

[4] Vedenyapin V.V. Photophoresis and reactive forces // Mathematical modeling, v. 18, 2006. /Russian/

[5] F.Ehrehaft, Ann.Phys. (Leipzig) 56, 81 (1918).

[6] Photophoresis phenomenon. Archive message from "Physics Forum". Posted by Alan Marshall on November 11 (2001).

[7] Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение спутников. Киев: Наукова думка, 1984.

[8] Melihov I.V., Simonov E.F., Vedernikov A.A., Berdonosov S.S., Chemojet Motion of Rigid Bodies, Rus. Chem. Jour., v. 41, No 3, pp. 5-16, 1997.

What does Lebesque's measure in the infinite dimensional space mean?

Vershik A. M. (Russia)
St. Petersburg Branch of Steklov Mathematical Institute

We will introduce so called infinite-dimensional Lebesgue measure which is the limit of measures on some homogeneous manifolds, – this is parallel to the classical Maxwell–Poincare lemma, which presents the Gaussian distribution as a weak limit of the measures on spheres S^n. This Lebesgue measure opens new possibilities in the combinatorics, representation theory, random processes, and in the theory of Fock space.

Cohomology of the braid groups and special involutions

Veselov A. P. (UK, Russia)
Loughborough
Landau Institute
A.P.Veselov@lboro.ac.uk

We give an explicit description of the action of a Coxeter group G on the total cohomology of the complement to the corresponding complexified reflection hyperplanes. The answer is given in terms of a geometric class of the involutions in G called special. The relation with the classical results by Arnold and Brieskorn on the cohomology of the braid groups will be discussed.

The talk is based on a joint work with G. Felder.

The 16th Hilbert problem, a story of mystery, mistakes and solution

Viro O. Ya. (Russia)
Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics
oleg.viro@gmail.com

Hilbert's problem of the topology of algebraic curves and surfaces (the 16th problem from the famous list presented at the second International Congress of Mathematicians in 1900) was difficult to formulate. The way it was formulated made it difficult to anticipate that it has been solved. I believe it has, and this happened more than thirty years ago, although the World Mathematical Community missed to acknowledge this.

Positivity of Schur function expansions of Thom polynomials

Weber Andrzej (Poland)
Uniwersytet Warszawski
aweber@mimuw.edu.pl

We consider a holomorphic map f of complex manifolds. For a prescribed singularity type let Σ_f denote the locus of the points in which the map f is of that type. The cohomology class of Σ_f depends on the Chern classes of the manifolds. It is expressed by the Thom polynomial. We will show that the coefficients of the Thom polynomials in the Schur basis are nonnegative. The proof is obtained by a combination of the approach to Thom polynomials via classifying spaces with the Fulton-Lazarsfeld theory of cone classes for ample vector bundles. Further generalizations based on the representation theory will be sketched.

References

[1] P. Pragacz, A. Weber *Positivity of Schur function expansions of Thom polynomials*, arXiv:math/0605308, to appear in Fund. Math.

Differential invariants of 2-order ODEs

Yumaguzhin V. A. (Russia)
Program Systems Institute of RAS, Pereslavl'-Zalesskiy
yuma@diffiety.botik.ru

Every ODE $\mathcal{E}$ of the form

$$y'' = a(x,y)y'^{\,3} + b(x,y)y'^{\,2} + c(x,y)y' + d(x,y) \tag{1}$$

can be identified with the section
$S_{\mathcal{E}} : (x,y) \mapsto \big(\, a(x,y),\, b(x,y),\, c(x,y),\, d(x,y)\,\big)$ of the product bundle

$$\pi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2\,.$$

Thus the set of all equations (1) is identified with the set of all sections of π.

It is well known that an arbitrary point transformation f transforms an arbitrary equation (1) to the equation of the same form. Coefficients of the transformed equation are expressed in terms of the coefficients of the initial one and 2-jet of f. That is f defines the natural transformation of sections of π. This defines the natural lifting of f to the diffeomorphism $f^{(0)}$ of the total space of π. In turn, $f(0)$ is naturally lifted to diffeomorphism $f^{(k)}$ of the bundle $J^k\pi$ of k-jets of sections of π, $k = 1, 2, \ldots$ Thus the pseudogroup of all point transformations of the base of π acts by its lifted transformations on every $J^k\pi$.

The lifting of point transformations generates the natural lifting of any vector field X from the base of π to the vector field $X^{(k)}$ on $J^k\pi$.

Let $\theta \in J^0\pi$, and let $p = \pi(\theta)$. Consider all vector fields X in the base passing through p. The isotropy algebra of θ is defined by the formula $g_\theta = \left\{\, [X]^2_p \,\middle|\, X^{(0)}_\theta = 0 \,\right\}$, where $[X]^2_p$ is the 2-jet of X at p. Its subalgebra $g = \left\{\, [X]^2_p \in g_\theta \,\middle|\, [X]^1_p = 0 \,\right\}$ is independent of $\theta \in J^0\pi$.

A first nontrivial differential invariant of point transformations of equations (1) is a horizontal 2-form ω_2 on $J^2\pi$ with values in g. This invariant is a unique obstruction to a linearizability of these equations by point transformations.

A next differential invariant appears on $J^3\pi$. It is a horizontal 3-form ω_3 with values in g.

Applying operations of tensor algebra to ω_2 and ω_3, we construct new differential invariants on $J^3\pi$.

Finally, we construct differential invariants on $J^k\pi$, $k \geqslant 4$. In particular, we construct scalar differential invariants.

Obtained invariants make possible to solve the equivalence problem for equations $\mathcal{E}$ under consideration so that all their 3-jets $[S_\mathcal{E}]^3_p$ belong to a generic orbit of the action of point transformations on $J^3\pi$. In particular, we solve the equivalence problem for generic equations (1).

References

[1] Liouville R. Sur les invariantes de certaines equationes differentielles // Jour. de l'Ecole Politechnique, 59 (1889) 7–88.

[2] Yumaguzhin V.A. On the obstruction to linearizability of 2-order ordinary differential equations // Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 83, No. 1-2, 2004. pp.133-148.

Lyapunov problem and spectrum of dynamical system

Zadorozhny V. F. (Ukraine)
Glushkov Institute of Cybernetics, Kiev
zvf@compuserv.com.ua

Approaches of determination ofthe Lyapunov function have been proposed in many issues [1] and further developed by many authors. But these very special approaches can not be extended to the case of general dynamical system, or cannot be used to obtain an algorithm of approximation of the region of attraction in the case of asymptotic stability. Thus the problem arises of finding the Lyapunov function (*Lyapunov problem*). Consider the autonomous differential system equations as follows

$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$

where $X : R^n \to R^n$ is an R-analytic function on R^n with $X(0) = 0$ (i.e. $x = 0$ is a steady state of (1)). Let the one is asymptotically stabile and $\Omega \subset R^n$ is region of attraction and on Ω there is a couple function (V, W) that theorem of Lyapunov for asymptotic stability is satisfied. It can be shown that in this case reasoning yields a simple inequality

$$Rg \triangleq \int_0^\infty g(x_t(x))w(x_t(x))dt \leqslant N \|g\|_2 V(x) \text{ a. e.} \tag{2}$$

where $x_t(x)$ is solution of Eq. (1) , $x_o = x \in \Omega$ is initial value, N is any number and $\|\cdot\|_2$ is the norm of the element $g \in L^2(\Omega)$, i.e. $\|g\|^2 = \int_\Omega |g|^2 dx$. In this case, *the operator R is the Hilbert-Schmidt operator in $L^2(\Omega)$ (see [2] p.136) i.e. $Rg \triangleq \int_\Omega \omega(x, y)g(y)dy$, $x, y \in \Omega$*. In order to construct the solution the following equation

$$Lf \mathrel{\mathring{=}} X\partial_x f = gw \tag{3}$$

Let us apply this result to Eq.(1).Write down this formula as follows

$$f = \int_\Omega \omega(x, y)g(y)dy, \text{ or } \ f = Rg \tag{4}$$

Differentiating formula (4) in view of (3) we obtain the formula $gw = \int_\Omega \varpi(x,y)g(y)dy$, where $\varpi \triangleq X\partial_x\omega$. We will consider the general case of L^2-decomposition. Let us transform gw to the sum $\lambda g + v^o$ into $L^2(\Omega)$. Here λ is absolute number and v^o is given function, for example the one is a local Lyapunov's function and $\int_\Omega gv^o dx = 0$. This reasoning yields an integral equation $\lambda g + v^o = \int_\Omega \varpi(x,y)g(y)dy$.

THEOREM [3,4].

1. *A domainΩ will be the region of attraction of the asymptotically stable steady-state $x = 0$ iff the real part of eigenvalues of the operator L is negative.*
2. *The $\mu \in \sigma(L)$ defined by the eigenvalues λ of the uniform Eq. (6).*
3. *Suppose the dynamical system (1) satisfies the condition $\Re(\mu \in \sigma(L)) \lessdot 0$. In this case, there exists the function $V \leqslant 0$ whose time derivative with respect to the given system (1) is positive almost everywhere, i.e. V satisfies a necessary and sufficient condition of asymptotically stable the steady state $x = 0$.*

In the following the kernel ω reduces to the degenerate kernel ω_N and the formal linearization of Poincare-Siegel [5] to a large extent. The spectrum approach enables us to suggest a new method for solving Lyapunov problem by means of Hille – Yosida theory [3]. We claim that *the Lyapunov problem is the problem of the existence of the dissipation operator* $L : [Lf, f] + [f, Lf] \leqslant 0$. A new approach to studying a nonlinear bunched beam dynamics based on the self-consistent Vlasov-Maxwell model. In the framework of this scheme, a new approach based on such property as universality of Maxwell equations and methods of control theory is applied [4-6].

References

[1] L. Yu. Anapols'kyi, V. D. Irtegov, V.M. Matrosov Different ways of the construction of Lyapunov function. VINITNI GENERAL MEKHANICA, V. 2, 1975, pp. 53-112.

[2] P.R.Halmos, V. S. Sunder Bounded Intergral Operators on L^2 Spaces, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1978 p.155

[3] V.F. Zadorozhny Fridrichs Method in a Lyapunov Problem, Applicable Analysis V. 81, No 3, 2002 pp.529-538

[4] V. F. Zadorozhny. Lyapunov Problem in Dynamical Control Systems Kibernetick i Sistemny Analiz, No. 6, 2002, pp. 133-142. [In Russian]

[5] V. I. Arnold. The additional chapters of the theory of the ordinary differential equations M.: Nauka, 1978, 304 p. [In Russian]

Quasi-projections

Zakalyukin V. M. (Russia)
Moscow State University
The University of Liverpool

The starting point of the singularity theory was classical Whitney theorem saying that generic singularities of a projection of a two-surface in the three space are folds along lines and pleats at isolated points.

The classification of singularities of projections of a two-surface embedded into RP^3 to a plane obtained by V. I. Arnold, O. Platonova, V. Goryunov and O. Scherback at the beginning of eighty-th was a nice generalization of Whitney theorem. The surface is assumed to be generic, and centre of projection can vary in RP^3. The list contains 14 simple classes P_i, $i = 1, \ldots, 11$ (see [1]).

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_1 & \leftarrow & P_2 & \leftarrow & P_3 & \leftarrow & P_6 & \leftarrow & P_8 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & P_4 & \leftarrow & P_7 & & P_{11} \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & P_5 & \leftarrow & P_{10} & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & P_9 & & & &
\end{array}$$

which are equivalent to a projection of a germ at the origin of surface $z = f(x, y)$ in R^3 with coordinates (x, y, z) by a sheaf of rays parallel to x

axis with the following functions

$$
\begin{array}{lll}
P_1 : f = x, & P_2 : f = x^2, & P_3 : f = x^3 + xy, \\
P_4 : f = x^3 \pm xy^2, & P_5 : f = x^3 + xy^3, & P_6 : f = x^4 + xy, \\
P_7 : f = x^4 \pm x^3 y + xy, & P_8 : f = x^5 \pm x^3 y + xy, & P_9 : f = x^3 \pm xy^4, \\
P_{10} : f = x^4 + x^2 y + xy^3, & P_{11} : f = x^5 + xy. &
\end{array}
$$

Some of these classes are non weighted homogeneous however all are simple. The equivalence here is the diffeomorphism of the domain of the ambient space containing the germ of the surface and does not containing the center of projection which preserve the fibration over the plane base of the projection.

These singularities were used later intensively.

We suggest another more rough classification which provides less number of classes. Namely two surfaces are called pseudo-equivalent if there is a diffeomorphism of the domain of the ambient space mapping one surface onto the other and satisfying the following property: if the projection ray is tangent to one of the surface at a point then at the image (or at the inverse image, respectively) of the point the other surface is also tangent to the ray passing through it. After a modification of this equivalence to get "geometrical" in J. Damon sense relation we get the following list of generic quasi-singularities of projections Q_i, $i = 1, \ldots, 9$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Q_1 & \leftarrow & Q_2 & \leftarrow & Q_3 & \leftarrow & Q_6 & \leftarrow & Q_8 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & Q_4 & \leftarrow & Q_7 & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & Q_5 & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & Q_9 & & & &
\end{array}
$$

Where

$$
\begin{array}{lll}
Q_1 : f = x, & Q_2 : f = x^2, & Q_3 : f = x^3 + xy, \\
Q_4 : f = x^3 \pm xy^2, & Q_5 : f = x^3 + xy^3, & Q_6 : f = x^4 + xy, \\
Q_7 : f = x^4 + x^2 y, & Q_8 : f = x^5 + xy, & Q_9 : f = x^3 \pm xy^4.
\end{array}
$$

Comparing these relations, the P_8 and P_{11} merge into single class Q_8, as well as P_7 and P_{10} merge into Q_7. All remaining classes with equal subscripts coincide. Differentiation with respect to x of Q_i provides a normal form of a simple boundary singularity in the plane (x, y) with the boundary $y = 0$.

We discuss other nice properties of quasi singularities. In particular, the discriminants of quasi projections are isomorphic to some strata of the discriminats of the ordinary ones.

Partially supported by RFBR050100458 grant.

References

[1] V. I. Arnold, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko, and V. A. Vassiliev, *Singularities II. Classification and Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 39, Dynamical Systems VIII, Springer-Verlag, Berlin a.o., 1993.

V. I. Arnold's hypothesis on congruences for the traces of iterations of integer-valued matrixes and some dynamical zeta functions

Zarelua A. V. (Russia)
MSTU
zarelua@higeom.math.msu.su

Analyzing experimental data, V. I. Arnold in 2004–2005 formulated several questions on congruences for the traces of integer-valued matrixes. An author's theorem from algebraic number theory (2006) generalizes a C. J. Smyth's theorem (1986) that gives a generalization of the Gauss' version of Fermat's Little theorem. These theorems imply the positive answer on some Arnold's questions. We show that some known results on dynamical zeta functions are rather simple consequences of congruences supposed to be true by V. I. Arnold.

Научное издание

Международная конференция "Анализ и Особенности",
посвященная 70-летию В. И. Арнольда

Тезисы докладов

МИАН, Москва
20–24 августа 2007 г.

Печатается в авторской редакции
Фото на обложке С. Третьяковой

Подписано в печать 13.08.2007
Тираж 250 экз.